ISSN 3034-1760
(online)

Пространство педагогических исследований

Сетевой научный журнал

2024 • Т. 1 • № 4

Методика преподавания математики

http://ppi-journal.ru/

Выход в свет: 20 ноября 2024 г. Выходит четыре раза в год

УЧРЕДИТЕЛЬ: Череповецкий государственный университет

НАПРАВЛЕНИЕ: 05.08.02 Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)

Адрес издателя, редакции, электронный адрес:
162600, Россия, г. Череповец, пр. Луначарского, д. 5.

ЦЕНА СВОБОДНАЯ

Сетевое издание
Уч.-изд. л. 6
Выход в свет: 20.08.2024
Формат 60 × 84 $^{1}/_{8}$
Гарнитура Таймс

ISSN 3034-1760
(online)

Education Research Environment

Online scientific journal

2024 • Т. 1 • № 4

Methods of Teaching Mathematics

http://ppi-journal.ru/

Publication: November 20, 2024. Issued four times a year

FOUNDER: Cherepovets State University

SCIENTIFIC SPECIALTY: 05.08.02 Theory and Methodology of Teaching and Education (by fields and levels of education)

Address of the publisher, editorial office and printing office: 162600 Russia, Vologda region, Cherepovets, Lunacharsky pr., 5

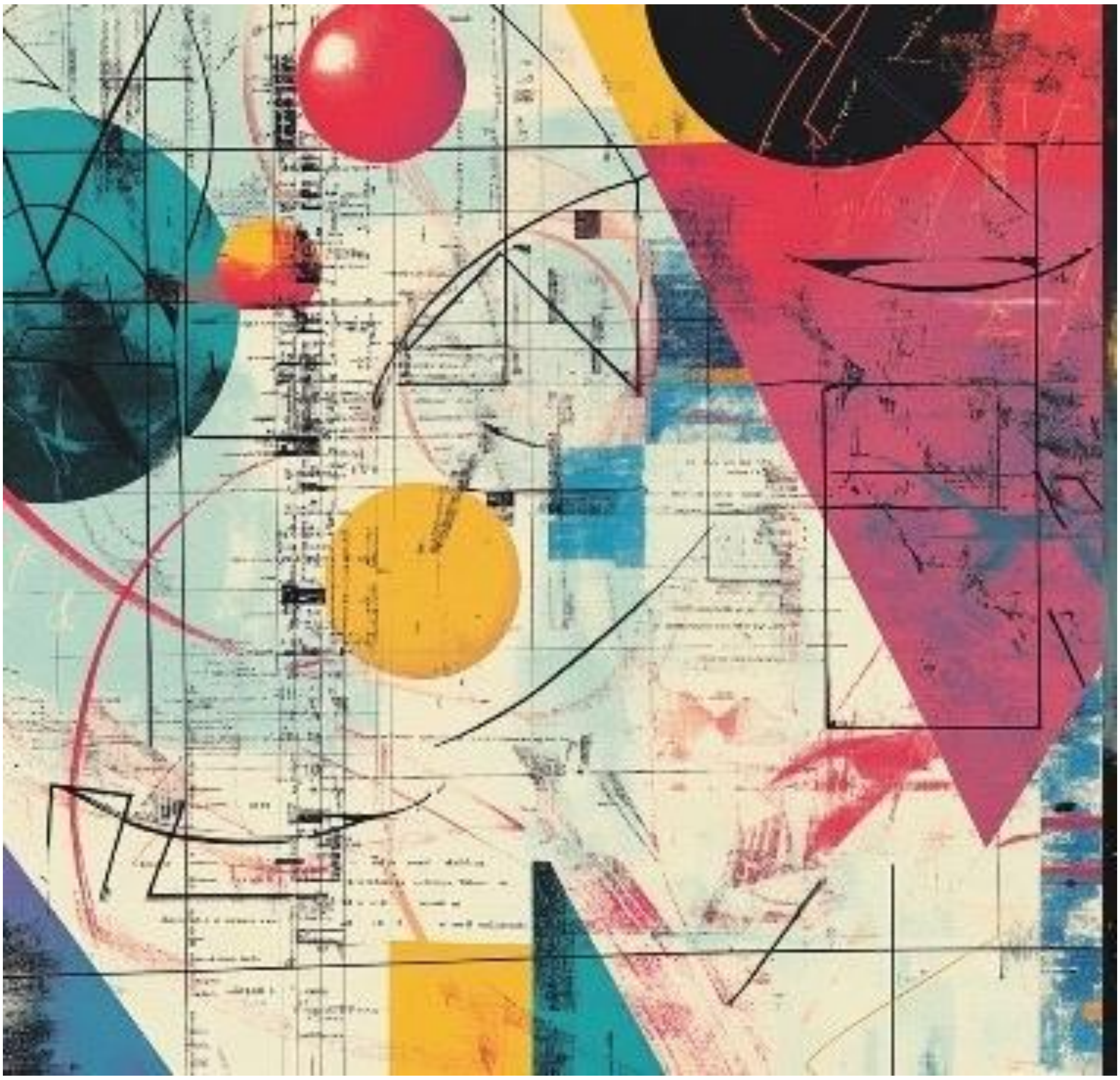
OPEN PRICE

Online media
6 standard publisher's sheets
Publication: 20.11.2024
Format 60×84 1/8
Font style Times

2024 • Vol. 1 • No. 4

Содержание

Contents



Обзоры

Review Articles

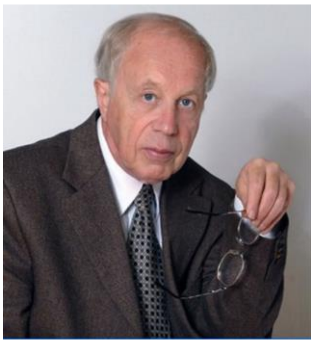
2024 · Том 1 · № 4

Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 7–23.
Education Research Environment, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 7–23.

Обзорная статья [(]
УДК 378.147
https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.42.46.001

Наука – вузу

Александр Григорьевич Мордкович
Московский городской педагогический университет,
Москва, Россия
amordkovich@yandex.ru
A. G. Mordkovich
Moscow City Pedagogical University,
Moscow, Russia
amordkovich@yandex.ru



Ирина Евгеньевна Малова
Брянский государственный университет
имени академика И. Г. Петровского,
Владикавказский научный центр Российской академии наук,
mira44@yandex.ru
I. E. Malova
Bryansk State Academician I. G. Petrovski University,
Bryansk, Russia
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
Vladikavkaz, Russia
mira44@yandex.ru

Аннотация. Проблема обобщения и систематизации результатов научных исследований различных авторов актуальна и требует выявления способов ее решения. Уникальным явлением является объединение научных исследований по решению проблем математического образования и методической подготовки учителя в рамках научного семинара преподавателей университетов и педагогических вузов, организованного в 1987 году А. Г. Мордковичем. В статье обозначено значение научного семинара преподавателей математики и информатики: семинар мотивирует научные исследования, поскольку участникам необходимо каждый год представлять новые результаты; семинар позволяет согласовывать позиции, поскольку выступления участников сопровождаются дискуссиями; дает возможность проследить развитие научных идей на основе сопоставления статей разных лет. Представлен анализ материалов 40-го семинара (2021 г.). Анализу подверглись 106 публикаций от 166 участников, среди которых 39 докторов наук. 55 статей были отнесены к проблемам совершенствования математического образования в вузе и методической подготовки учителя математики, остальные – к проблемам математического образования в школе. Из каждой публикации была выделена практическая значимость результатов, а затем осуществлялась их систематизация. Рекомендации систематизированы по трем направлениям: совершенствование учебных планов и установление межпредметных связей между дисциплинами; исследование общих вопросов обучения в вузе; методические рекомендации по изучению отдельных дисциплин. В каждом направлении сделана попытка систематизировать материалы по подразделам, раскрывающим их общие цели. В первом направлении представлены способы совершенствования учебных планов, предложения об их дополнении, по установлению связей между учебными дисциплинами. Во втором направлении представлены проблемы подготовки учителей, подходы к обучению в вузе на современном этапе, способы организации контроля в вузе. В третьем направлении материалы систематизированы применительно к дисциплинам математического или методического циклов.

Ключевые слова: методика обучения математике в вузе, методическая подготовка учителя математики, научный семинар

Для цитирования: Мордкович А Г., Малова И. Е. Наука – вузу // *Пространство педагогических исследований*. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 7–23. (In Russian). https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.42.46.001

Science for University

Abstract. Generalization and systematization of the results of scientific research by various authors is a relevant issue requiring identification of the ways to resolve it. A unique phenomenon is the unification of scientific research addressing issues in mathematical education and methodological teacher training in a scientific seminar format for university and pedagogical university teachers, organized in 1987 by A. G. Mordkovich. The article highlights the importance of a scientific seminar for teachers of mathematics and computer science: the seminar motivates scientific research, since participants need to come up with new results every year; the seminar allows them to coordinate positions, since participants' speeches are followed by discussions; it makes it possible to trace the development of scientific ideas based on a comparison of research papers published in different years. The article analyses the proceedings of the 40th seminar (2021). 106 research papers by 166 seminar participants, including 39 doctors of sciences, have become the subject of the analysis. 55 research papers were attributed to the issues of improving mathematical education at the university and the methodological training of a mathematics teacher, the rest to the issues of mathematical education at school. The article highlights practical significance of each research paper finding, and then gives their systematization. The recommendations are collated in three directions: improving curricula and establishing interdisciplinary links between disciplines; research on general issues of higher education; methodological recommendations for the study of definite disciplines. In each direction, an attempt has been made to systematize the research papers into subsections that reveal their common goals. The first direction present the ways to improve curricula, proposals for supplementing curricula, and establish links between academic disciplines. The second direction studies the problems of teacher training, approaches to university education at the present stage, and the ways of organizing control at the university. The third direction systematizes the proceedings related to the disciplines of mathematical or methodological cycles.

Keywords: methods of teaching mathematics at a university, methodical training of a mathematics teacher, scientific seminar

For citation: Mordkovich A. G., Malova I. E. Science for University. *Education Research Environment*, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 7–23. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.42.46.001

Введение

В Российских вузах широко применяется практика проведения научных семинаров. Известны семинары в МГУ, ВШЭ. Н. В. Литвак научный семинар рассматривает как современную форму коллективной работы ученых, как форму повышения квалификации, ознакомления с работами коллег, обсуждения новой научной информации[1]. В статье В. Г. Фирстова рассмотрена связь активности научных семинаров вузов с развитием их инновационной активности[2].

В 1987 году состоялся первый научный семинар преподавателей математики различных вузов. Создателем семинара и его научным руководителем по сей день является А. Г. Мордкович. На каждом семинаре организуется коллективное обсуждение проблем математического образования. Семинар в последние годы приобрел статус Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педвузов, он проводится ежегодно. ВУЗ, который принимает семинар, по согласованию с научным руководителем семинара определяет актуальную тему для обсуждения.

Значимость семинара определяется тем, что, во-первых, семинар стимулирует новые научные исследования (ежегодно представляются новые научные результаты), во-вторых, дает возможность согласовать позиции исследователей (все доклады обсуждаются в дискуссионном режиме), в-третьих, сохраняет историю развития научных идей (сборники семинаров рассматриваются как источники обобщающих выводов).

Так, Т. Т. Фискович подчеркивает значимость «коллективного разума»[3]; в работе И. Е. Маловой обобщены идеи участников семинара по организации методической подготовки учителя в XXI веке[4]; Ю. А. Дробышев и И. В. Дробы-

[1] Литвак Н. В. К вопросу о коллективной теоретической работе // Вестник МГИМО. 2012. № 4. С. 232–236.

[2] Фирстов В. Г. Роль и функции научных семинаров в развитии инновационной деятельности университетов // Инновации и инвестиции. 2019. № 4. С. 26–29.

[3] Фискович Т. Т. Еще раз уже о расширенном взгляде со стороны и впрок; как из глыбы мыслей выросла гряда горных пород с поблескивающими драгоценностями // Инновационные технологии обучения математике в школе и вузе: материалы XXX Всероссийского семинара преподавателей математики высших учебных заведений 29–30 сентября 2011 года. Елабуга, 2011. С. 13–15.

[4] Малова И. Е. Методическая подготовка учителя математики в XXI веке: по материалам участников семинара А.Г. Мордковича // Математика – основа компетенций цифровой эры: Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (01–02 октября 2020 года). Москва: ГАОУ ВО МГПУ, 2020. С. 38–45.

шева обобщили опыт участников семинара по использованию истории математики в математической и методической подготовке будущих учителей[1].

В 2021 году в Брянском государственном университете имени академика И. Г. Петровского состоялся 40-й Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов».

В рамках семинара были представлены стендовые доклады студентов направления «Педагогическое образование», профиль «Математика», основанные на их курсовых работах. В докладах обобщены направления научных исследований участников семинара по проблемам: «Организация углубленного изучения математики в школе» (Калуга – 1998); «Формирование духовной культуры личности в процессе обучения математике в школе» (Вологда – 2001); «Актуальные проблемы обучения математике в школе» (Челябинск – 2004, Саратов – 2005); «Организация обучения математике в профильных классах» (Киров – 2006); «Новые средства и технологии обучения математике в школе» (Самара – 2007); «Инновационные технологии обучения математике в школе» (Елабуга – 2011); «Проблемы обучения математике в школе в условиях реализации новых образовательных стандартов» (Тобольск – 2012, Ульяновск – 2016); «Основы решения проблемы качества математического образования» (Екатеринбург – 2013); «Тенденции и перспективы развития математики» (Киров – 2014); «Математическое образование в цифровом обществе» (Самара – 2019, Москва – 2020). В стендовых докладах также был представлен анализ научно-методической деятельности ведущих преподавателей вуза-организатора научного семинара.

Данная статья направлена на выявление и систематизацию в материалах 40-го Международного научного семинара по проблемам математического образования в вузе и методической подготовки учителя математики вопросов практической значимости научных исследований[2]. Аналогичный анализ по проблемам обучения математике школе предоставлен в статье «Наука – школе»[3].

---

[1] Дробышев Ю. А., Дробышева И. В. История математики в педагогическом образовании // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 116–119.

[2] Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. 467 с.

[3] Малова И. Е., Мордкович А. Г. Наука – школе // Математика в школе. 2022. № 2. С. 69–72.

Основная часть

Систематизируем результаты исследований по трем направлениям: совершенствование учебных планов и установление межпредметных связей между дисциплинами; исследование общих вопросов обучения в вузе; методические рекомендации по изучению отдельных дисциплин.

НАПРАВЛЕНИЕ 1. Совершенствование учебных планов и установление межпредметных связей между дисциплинами.

Способы совершенствования учебных планов

Г. Е. Сенькина (Смоленск) предложила проектировать модуль мобильности (minor) в структуре основной образовательной программы. Модуль мобильности рассматривается как элективная часть основной образовательной программы, включающая дисциплины по выбору из предметных областей, которые являются смежными с основной областью профессиональной деятельности. Они позволяют приобрести дополнительные знания и компетенции, расширяя основную программу обучения. Представлен возможный состав учебных предметов в майнорах и отводимое для того количество зачетных единиц.

В. А. Беднаж, С. В. Путилов, М. М. Сорокина (Брянск) обосновали роль продуманного учебного плана магистратуры по программе «Комплексный анализ и алгебра» в подготовке студентов к научно-исследовательской деятельности.

Дополнение учебного плана новыми курсами представлено в табл. 1.

В докладах участников семинара высказаны предложения по установлению связей между дисциплинами, связей с учебными программами общего образования, с профессиональными стандартами.

Н. А. Бушмелева, В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов (Киров) представили разработанный базовый онлайн курс по высшей математике, распределенный по трем модулям: математический анализ; линейная алгебра и аналитическая геометрия; теория вероятностей и математическая статистика. Исторические и методологические аспекты развития математики представлены Е. М. Вечтомовым во вводной видеолекции. По каждому из модулей курса в статье приведены определяющие (базовые) идеи.

Л. А. Иваненко, И. Н. Ковальчук (Мозырь, Беларусь) поделились опытом формирования академических, социально-личностных и профессиональных компетенций у будущих учителей математики. Приведены примеры по дисциплинам: аналитическая геометрия, методы изображения фигур и основания геометрии, элементарная математика и практикум по решению задач, решение олимпиадных задач по математике, педагогика, методика преподавания математики. В частности, студенты на втором курсе начинают готовить проект в форме методического пособия по одной из тем школьного курса математики, который защищают на государственном экзамене.

Таблица 1

Дополнение учебного плана новыми курсами

Автор	Предложения
А. Г. Гейн (Екатеринбург)	Создан двухнедельный интенсивный курс, который используется до начала изучения всех математических и программистских курсов с применением платформы Ulearn
Н. Н. Яремко, Н. Б. Тихонова (Пенза)	Разработан вводный курс развития пространственного мышления студентов и школьников
Т. В. Гостевич, Л. В. Лещенко (Могилев, Беларусь)	Включены дисциплины «Методика формирования логического мышления младших школьников», «Технология проектного обучения на уроках и во внеклассной работе по математике». Предусмотрено установление преемственности между различными дисциплинами. Представлен ряд творческих заданий по некоторым из дисциплин
В. И. Игошин (Саратов)	Предложен ряд математических тем для обучения будущих учителей математики на уровне магистратуры, которые являются развитием и углублением нескольких разделов, изученных будущими учителями математики на уровне бакалавриата
Е. И. Скафа (Донецк)	Представлена программа реализации проектно-эвристического подхода к содержанию профессионального образования будущего учителя математики. Программа предусматривает: переход образовательной программы на практико-ориентированное обучение; введение в учебный план дисциплин проектной и эвристической направленности («Основы проектной деятельности учителя математики», «Технологии эвристического обучения математике»); создание офиса студенческого проектирования, в рамках которого студенты представляют свои педагогические идеи; создание республиканского инновационного парка как базы практик будущих учителей
Э. Г. Гельфман, Ю. К Пенская (Томск)	Представлено содержание и организация спецкурса «Интеллектуальное воспитание средствами математики», в рамках которого осуществляется обогащение системы взглядов на школьную математику, на способы ее понимания, пересмотр опыта изучения математики с точки зрения психологии ее усвоения, понимание необходимости индивидуализации обучения

Е. А. Суховиенко (Челябинск) конкретизировала компетенции «Способен осваивать и использовать базовые научно-теоретические знания и практические

ISSN 3034-1760

умения по преподаваемому предмету в профессиональной деятельности», «Способен анализировать и оценивать потенциальные возможности обучающихся, их потребности и результаты обучения», сопоставила их с требованиями профессионального стандарта педагога. Приведены примеры тестовых и практико-ориентированных заданий для данных компетенций.

Для студентов-будущих экологов С. И. Торопова (Киров) предложила задачи с экологическим наполнением, составленные, в частности, на основе регионального экологического материала. Рекомендовано установление межпредметных связей математики с профильными экологическими дисциплинами, а также приобщение студентов к самостоятельным научным исследованиям (например, по изучению воздействия различных компонентов выбросов загрязняющих веществ атмосферного воздуха на первичную заболеваемость детского и подросткового населения Кировской области).

И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева (Москва) выделили типы тестовых заданий по теме «Бинарные отношения», привели примеры заданий на каждый тип в рамках трех дисциплин: алгебра, геометрия, математический анализ, тем самым установили взаимосвязи между предметами.

НАПРАВЛЕНИЕ 2. Исследование общих вопросов обучения в вузе.

Проблемы современной подготовки учителя представлены в табл. 2.

Таблица 2

Проблемы современной подготовки учителей

Автор	Проблема (ы)	Предложения
И. Г. Липатникова (Екатеринбург)	Непонимание студентами и неприятие математики как предмета изучения; информационный серфинг; функциональная неграмотность; цифровая амнезия	Использовать ситуации, для которых, согласно конкретному плану, должны быть представлены решения в виде фрагмента урока; предлагать студентам создавать инструкции при работе с математическими объектами; проводить имитационные дидактические игры
Л. В. Шкерина (Красноярск)	Выявление профессиональных дефицитов у будущих учителей	Использовать специальные опросники, диагностические задания и оценочные карты эксперта, а затем устранять профессиональные дефициты

Подходы к обучению в вузе на современном этапе

Е. Г. Евсеева (Донецк, ДНР) предложила подготовку будущих учителей математики к проектированию учебно-исследовательской деятельности (УИД) обучающихся осуществлять на основе сочетания трех подходов:

1) деятельностный подход (обучающиеся осваивают математические учебные действия, знания и действия по математическому моделированию, способы исследовательской деятельности);

2) интегративный подход (на трех уровнях интеграции: «внутрипредметном (интеграция алгебраического и геометрического методов, интеграция теории и практики в обучении математике), межпредметном (интеграции математики и информатики другими учебными предметами), метапредметном (формирование метапредметных понятий: гипотеза, исследование, модель и др.; формирование универсальных учебных действий по выполнению учебно-исследовательской деятельности)» [1];

3) системный подход (подразумевает системный анализ УИД при ее проектировании и представление результатов обучения в виде двух взаимосвязанных систем: исследовательских действий и способов действий, подлежащие освоению в УИД, и знания, подлежащие усвоению и необходимые для выполнения исследовательских действий).

Н. П. Пучков, Т. Ю. Забавникова (Тамбов) провели сравнение основ традиционной и цифровой дидактик. Обосновали важность их рационального сочетания. Показали роль выполнения студентами комплексных заданий, охватывающих как различные разделы изучаемого учебного курса, так и исследование ситуаций реального мира на объектах, наиболее знакомых и значимых для обучающихся, где действуют понятные для них процессы и взаимосвязи.

Е. А. Перминов (Екатеринбург) поделился размышлениями о роли гармонизации профессионального образования педагогов в цифровую эру, о том, что мешает этой гармонии.

М. А. Кислякова (Хабаровск) раскрыла базовый психолого-педагогический компонент профессионально-методической подготовки будущего учителя математики, содержание которого представлено тремя группами знаний (табл. 3).

---

[1] Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: Материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 91.

ISSN 3034-1760

Таблица 3

Базовый психолого-педагогический компонент профессионально-методической подготовки будущего учителя математики

№	Группа знаний	Содержание
1.	Знания о развитии личности учащихся в процессе математического образования	Нейропсихологические факторы, влияющие на успеваемость учащихся, познавательные психические процессы, рефлексия и саморегуляция учащихся, интеллект как форма организации ментального опыта учащихся, математическая тревожность и т. д.
2.	Знания о математической деятельности учащихся	Мотивация к обучению математике, познавательные барьеры в обучении математике, особенности восприятия алгебры и геометрии учащимися при изучении математики и т. д.
3.	Знания о психологоориентированных концепциях обучения математике	Развивающее обучение, личностно ориентированное обучение, «обогащающее» обучение, рефлексивное обучение и т. д.

Н. В. Бровка (Минск, Беларусь) исследовала когнитивную визуализацию материала (наглядное моделирование) при обучении студентов математике и информатике. Рассматриваются два варианта такого моделирования: а) семантическое моделирование («выявление общих черт в формулировках определений, свойств, теорем с целью расширения знаково-символического опыта оперирования математическими объектами»); б) аналитико-процедурное моделирование (разработка «шаблонов (фреймов) заданий, включающих параметры, в зависимости от которых для выполнения задания необходимо применить тот или иной метод, критерий или признак»)[1]. Приведены примеры из курса математического анализа.

Л. Л. Тухолко (Минск, Беларусь) предложила модель структуры процесса обучения математике и рассмотрела ее как основу методики преподавания предмета. Модель отражает взаимосвязь понятий «обучение математике», «изучение математики» и видов деятельности учителя и учащихся. Методику обучения математике представила как систему знаний о деятельности учителя по обучению учащихся математике и о деятельности учащихся по изучению этого учебного предмета.

[1] Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 137.

Т. Е. Рыманова (Елец) инновационные компоненты профессиональной деятельности современного учителя математики связала с технологией В. М. Монахова, в которой логическая структура учебного процесса имеют блоки: целеполагание, диагностика, коррекция, дозирование домашнего задания.

Вопросы организации работы студентов с учебными материалами

Л. И. Селякова, К. Э. Матрон (Донецк) представили разработанное учебно-методическое пособие для формирования метапредметных математических понятий при обучении будущих учителей математики и информатики. Метапредметное математическое понятие определено авторами «как такое математическое понятие, которое возникает без привязки к определенной математической дисциплине, обобщает признаки и свойства процессов, объектов или явлений, характерных для многих математических дисциплин, применяется во всех, или почти во всех, математических дисциплинах, и определение которого не зависит от контекста его применения в конкретной дисциплине»[1]. Приведены примеры метапредметных заданий на понятия «множество» и «предикат».

Т. И. Уткина (Орск) представила комплекс учебных пособий по геометрии в системе подготовки бакалавров – будущих учителей математики в условиях цифровизации образования. Автором предложена модель конструирования учебного пособия по геометрии, особенностью которой является методологическая и профессионально-практическая направленность. Разработан материал, «который позволяет организовать различные виды самостоятельной учебно-профессиональной деятельности студента: выявление и активизация личного опыта, связанного с умением управлять деятельностью обучающихся по усвоению математических понятий, математических предложений и их доказательств; самоопределение по отношению к имеющимся методам; рефлексивное осознание процесса изучения геометрии. Выделяются следующие виды методологических заданий: на выявление существенных признаков понятий, способов конструирования определений, на установление связей и отношений данного понятия с другими понятиями, на установление связей между теоремами, на выяснение состава доказательства теоремы, на определение вида доказательства теоремы и оформление доказательства теоремы»[2].

Ю. Б. Мельников (Екатеринбург) предложил три уровня работы с материалом: 1) уровень типовых алгоритмов деятельности; 2) уровень реализации стра-

[1] Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 94.

[2] Там же. С. 171.

тегий, типовых для данного вида деятельности; 3) уровень методологии, т.е. уровень адаптации известных стратегий к новым задачам, разработки новых стратегий и применения «междисциплинарных» стратегий.

О. А. Борзенкова, Л. В. Лысогорова (Самара), раскрывая особенности формирования методико-математической компетентности будущих педагогов начальной школы, привели задание учащимся, вопросы студентам, связанные с ним, и критерии оценивания выполнения задания студентами. Студентам предложено: определить вид задания (ответ обосновать); назвать компоненты математической грамотности в задании; определить трудности учащихся при выполнении данного задания (4-5 положений); разработать рекомендации по преодолению выделенных трудностей (5 пунктов); описать деятельность обучающихся при выполнении каждого пункта задания; обосновать ошибки младших школьников и способы их преодоления.

Г. И. Ковалева (Волгоград) рассмотрела проблему формирования у будущих учителей математики методических представлений при изучении курса «Элементарная математика». Предложено: формулировать задачи профессиональной деятельности (анализ трудностей учащихся при обучении математике, организация деятельности учителя математики, анализ методических ошибок учителя и причин их возникновения, сопоставление задачного материала учебников разных авторов, анализ различных подходов к изучению темы и пр.); организовывать деятельность студентов по изучению элементарной математики через решение систем задач; работать с каждой задачей системы (анализ условия задачи, сбор информации об объекте, описанном в задаче, организация поиска решения, этапов «взгляда назад» и «развития задачи»); вовлекать студентов в конструктивную деятельность. По всем направлениям приведены примеры.

Организации контроля в вузе

В. Г. Ермаков (Гомель, Беларусь) обосновал необходимость корректирующего обучения и предложил осуществлять контроль обучающихся в важных точках процесса обучения через задания, которые надо сдать преподавателю устно на максимальном уровне качества.

И. Е. Малова (Брянск) раскрыла этапы развития способов контроля методической подготовки студентов (контроль ограничивается зачетами, экзаменами, контрольными работами; добавляется контроль индивидуальной работы; добавляется контроль работы над материалами лекций и контроль группового выполнения практических заданий), выделила проблемы обучения и привела примеры способов контроля по их решению.

Н. С. Подходова, В. А. Снегурова, В. В. Орлов (Санкт Петербург) проанализировали эволюцию средств оценивания процесса подготовки будущих учителей математики к профессиональной деятельности, начиная с XIX века. Обосновали, что в настоящее время важным средством оценивания являются методические задания. Приведен ряд примеров заданий. Названы проблемы их разработки, связанные с необходимостью учета современных изменений в образовании.

И. Н. Власова, И. В. Мусихина, С. И. Крылатых (Пермь) раскрыли организацию студенческой методико-математической олимпиады (тематику, конкурсы, домашние задания и др.), провели анализ математических и методических затруднений участников. Обосновали, что предложенная олимпиада является эффективным средством формирования профессиональных компетенций будущего педагога.

НАПРАВЛЕНИЕ 3. Методические рекомендации по изучению отдельных дисциплин.

Изучение математических дисциплин

А. И. Дзундза, В. А. Цапов (Донецк) предложили серию заданий по математическому и комплексному анализу, которые рассматриваются как средство формирования мировоззрения будущих учителей математики.

М. И. Ефремова, С. В. Игнатович (Мозырь, Беларусь) описали организацию управляемой самостоятельной работы студентов через систему заданий по дисциплине «Дифференциальные уравнения» и критерии их оценки.

С. И. Калинин (Киров) рассмотрел обобщенное неравенство Караматы, представил аспекты его использования в содержании обучения математике школьников и студентов.

И. С. Козловская, С. В. Шолтанюк (Минск, Беларусь) предложили методику организации курса «Уравнения математической физики» на факультете прикладной математики и информатики с использованием современных информационных технологий.

Н. В. Сычева (Брянск) рекомендовала обучать раскрытию неопределенностей при вычислении пределов функции с помощью систематизирующих материалов, предусматривающих виды неопределенностей и способы деятельности по их раскрытию.

Л. П. Латышева, А. Ю. Скорнякова, Е. Л. Черемных (Пермь) представили опыт использования различных интернет ресурсов при обучении математическому анализу.

Н. М. Махина, В. А. Беднаж (Брянск) поделились опытом преподавания дисциплин математического цикла с применением технологий дистанционного обучения. Указаны ресурсы для работы с формулами. Приведен тематический

ISSN 3034-1760

план практических занятий по дисциплине «Интегральное исчисление функций одной переменной. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» с использованием цифровых технологий.

М. Е. Сангалова, Е. В. Баранова (Арзамас) предложили различные способы визуализации и интерактивности при подготовке материалов электронного курса по математическому анализу: сценарии видеофильмов по теме «Предел последовательности»; пошаговый комментарий решения задания на применение замечательного предела; примеры тестовых заданий к лекции «Равномерная непрерывность. Теорема Кантора»; примеры заданий для студентов в рамках Форума на платформе Moodle.

О. М. Абрамова (Арзамас) выделила достоинства и недостатки использования цифровых технологий в условиях дистанционного обучения математике, привела аннотацию использования соответствующих цифровых ресурсов в учебном процессе (какие платформы и какие полезные для обучения ресурсы они содержат).

Е. В. Бахусова (Тольятти) раскрыла способ представления предела функции с анимацией в графическом калькуляторе Desmos.

Е. А. Богданова, П. С. Богданов, С. Н. Богданов (Самара) предложили способ реализации внутрипредметных связей в вузовском курсе геометрии посредством решения задач на построение. Указали простейшие шаги построений и их аналитическую интерпретацию: построение прямой, проходящей через две построенные точки, окружности с центром в построенной точке и радиусом, равным отрезку с концами в построенных точках, точки пересечения двух непараллельных прямых и др. Привели примеры аналитической интерпретации некоторых основных геометрических построений (отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку, от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу и др.).

Ю. С. Шатрова (Самара) представила организацию и содержание математического боя на занятиях по дисциплине «Математическая логика».

Н. Г. Кузина, Д. В. Галушкина (Ульяновск) представили программу курса «Математические модели динамических систем». В списке литературы указали пособие, содержащее контрольные работы по данной дисциплине и др.

Е. А. Курьянова (Тольятти) представила проектирование содержания дисциплины «Теория игр» для бакалавров профиля «Математическое образование». Включены вопросы: «классификация игр; основные понятия теории игр; применение теории игр для принятия стратегических управленческих решений; принятие решений в условиях неопределенности и риска внешней среды; модели парных игр с ненулевой суммой, биматричные игры, игры с последовательностью ходов, позиционные игры. Приведена диагностическая работа первого модуля «Общее представление о теории игр».

Ю. Б. Мельников, А. А. Суетин (Екатеринбург) представили разработанный сервис генерирования именных индивидуальных интерактивных домашних заданий для студентов.

В. С. Мурашко (Гомель, Беларусь) раскрыла использование интерактивных элементов («Лекция», «Задание», «Тест», «Журнал оценок», элементы для обмена сообщениями) в курсе «Математическое моделирование и алгоритмизация инженерных задач».

Изучение методических дисциплин

Е. И. Деза (Москва) предложила способ подготовки будущего учителя к организации школьных математических олимпиад: «обучение решению задач – обучение «тиражированию» задач». Реализация способа показана на примере курсов по выбору: «Олимпиадные задачи по теории графов»; «Олимпиадные задачи по арифметике».

С. П. Зубова, Л. В. Лысогорова (Самара) предложили задания на использование теоретико-предметных математических знаний в профессиональной деятельности в рамках дисциплин «Математика», «Дидактические основы обучения математике младших школьников».

С. А. Севостьянова, Е. В. Мартынова (Челябинск) раскрыли методические идеи курса «Актуальные вопросы методики обучения математике», направленного на подготовку студентов к формированию функциональной грамотности у школьников при изучении математики. В частности, использование мини-проектов, разработка которых предусматривает 5 заданий: представить решение задачи; выделить математические понятия и умения, которые использовали при решении этой задачи; разработать систему подготовительных упражнений и вопросов для данной задачи; разработать методику работы с задачей (описать основные этапы работы над практико-ориентированной задачей: разбор условия, краткая запись, организация поиска решения (подведение к решению), запись решения, возможное обобщение задачи); составить задачу-продолжение (предложить новый вопрос к данной задаче).

Э. Х. Галямова (Набережные Челны) представила разработанный цифровой симулятор педагогической деятельности при работе с задачей повышенной сложности.

С. Д. Сыротюк (Тольятти) предложила идею изучения основ объектно-ориентированного программирования до обучения профессиональным языкам программирования для обеспечения фундаментальной подготовки студентов в области самой методологии, базовых концепций объектно-ориентированного программирования. Выделены образовательные задачи обучения, три формы организации процесса обучения (индивидуальная, групповая, коллективная). В

ISSN 3034-1760

процессе обучения объектно-ориентированному программированию рекомендовано использовать средства объектно-ориентированного проектирования.

Выводы

Сделаем основные выводы.

Во-первых, остается проблемой способы распространения результатов исследований в практику обучения в различных вузах. В статье показан один из них – выделить практическую значимость результатов, представленных в публикациях семинара, и обобщить их в отдельные направления. Идея систематизации исследований вокруг их практической значимости является эффективной.

Другой способ систематизации материалов семинара представлен А. В. Ястребовым и Г. Е. Сенькиной по итогам работы 42-го семинара[1]. Предложено систематизировать данные об участниках на основе анализа сведений об авторах и научное содержание семинара на основе пленарных докладов и направлений работы секций семинара.

Во-вторых, определено значение научного семинара преподавателей математики и информатики с трех позиций: для мотивации новых научных исследований; для согласования научных результатов; для обобщения и систематизации исследований.

В-третьих, выделено три направления систематизации практических рекомендаций: 1) совершенствование учебных планов и установление связей между дисциплинами; 2) исследование общих вопросов обучения в вузе; 3) методические рекомендации по изучению отдельных дисциплин.

Организаторы семинара получили письма от участников семинара с благодарностью. Вот выдержки из некоторых из них.

«Я чувствую необходимость поблагодарить за возможность посетить ваш семинар. Я глубоко впечатлен очень высоким качеством семинара и многочисленными квалифицированными научными докладами…. С наилучшими пожеланиями из Дрездена» (Л. Падитц, Германия).

«Поздравляю с успешным проведением семинара, а материалы именно это и подтверждают» (Т. И. Уткина, Орск).

«Огромное спасибо за профессионализм, взаимодействие и сохранение души Семинара!» (И. Н. Власова, Пермь).

«Уникальное явление представляет собой данный семинар, пусть он продолжает быть и развиваться» (С. И. Калинин, Киров).

Сборник материалов 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов представлен в РИНЦ и в электронной библиотеке «Математическое образование».

---

[1] Ястребов А.В., Сенькина Г.Е. О методологии анализа крупного педагогического форума // Математика в школе. 2024. № 1. С. 3–8.

Список литературы / References

Дробышев Ю. А., Дробышева И. В. История математики в педагогическом образовании. *Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов*: *материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов*. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 116–119.

Drobyshev Yu. A., Drobysheva I. V. History of mathematics in pedagogical education. *Development of general and professional mathematical education in the system of national universities and pedagogical universities: proceedings of the 40th International Scientific Seminar of University Teachers of Mathematics and Computer Science and Pedagogical Universities.* Bryansk: IP Khudovets R. G., 2021. pp. 116–119. (In Russian)

Литвак Н. В. К вопросу о коллективной теоретической работе. *Вестник МГИМО*, 2012, № 4, с. 232–236.

Litvak N.V. On the issue of collective theoretical work. *MGIMO Bulletin*, 2012, No. 4, pp. 232–236. (In Russian)

Малова И. Е. Методическая подготовка учителя математики в XXI веке: по материалам участников семинара А. Г. Мордковича. *Математика – основа компетенций цифровой эры*: *материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (01–02 октября 2020 года)*. Москва: ГАОУ ВО МГПУ, 2020. С. 38–45.

Malova I. E. Methodological training of a mathematics teacher in the 21st century: based on proceedings by participants in A. G. Mordkovich's seminar. *Mathematics is the Basis of Digital Era Competencies: Proceedings of XXXIX International Scientific Seminar of University Mathematics and Computer Science Teachers and Pedagogical Universities (October 1–2, 2020).* Moscow: GAOU VO MGPU, 2020, pp. 38–45. (In Russian)

Малова И. Е., Мордкович А.Г. Наука – школе. *Математика в школе*, 2022, № 2, с. 69–72.

Malova I. E., Mordkovich A. G. Science for school. *Mathematics at School*, 2022, № 2, pp. 69–72. (In Russian)

Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянск: ИП Худовец Р. Г., 2021. 467 с.

Development of General and Professional Mathematical Education in the System of National Universities and Pedagogical Universities: Proceedings of the 40th International Scientific Seminar of University Teachers of Mathematics and Computer Science and Pedagogical Universities. Bryansk: IP Khudovets R. G., 2021. 467 p. (In Russian)

Фирстов В. Г. Роль и функции научных семинаров в развитии инновационной деятельности университетов. *Инновации и инвестиции*, 2019, № 4, с. 26–29.

Firstov V. G. The role and functions of scientific seminars in the development of innovative activities of universities. *Innovations and Investments*, 2019, no. 4, pp. 26–29. (In Russian)

Фискович Т. Т. Еще раз уже о расширенном взгляде со стороны и впрок; как из глыбы мыслей выросла гряда горных пород с поблескивающими драгоценностями. *Инновационные технологии обучения математике в школе и вузе: материалы XXX Всероссийского семинара преподавателей математики высших учебных заведений 29–30 сентября 2011 года*. Елабуга, 2011, с. 13–15.

Fiskovich T. T. On an expanded view from the side and for future use once again; how from a block of thoughts a ridge of rocks with glittering jewels grew. *Innovative Technologies of Teaching Mathematics in Schools and Universities: Proceedings of the XXX All-Russian Seminar of Teachers of Mathematics of Higher Educational Institutions on September 29–30, 2011*. Elabuga, 2011, pp. 13–15. (In Russian)

Ястребов А. В., Сенькина Г. Е. О методологии анализа крупного педагогического форума. *Математика в школе*, 2024, № 1, с. 3–8.

Yastrebov A.V., Senkina G.E. On the methodology of analyzing a large pedagogical forum. *Mathematics at School*, 2024, no. 1, pp. 3–8. (In Russian)

Сведения об авторах

Александр Григорьевич Мордкович – доктор педагогических наук, профессор, 1amordkovich@yandex.ru, Московский городской педагогический университет (д. 4, корпус 1, 2-й Сельскохозяйственный проезд, 129226 Москва, Россия); **Alexandr G. Mordkovich** – Dr. Sci. (Pedagogy), professor, amordkovich@yandex.ru, Moscow City Pedagogical University (4, 2nd Sel'skokhozyaystvennyy drive, 129226 Russia, Moscow).

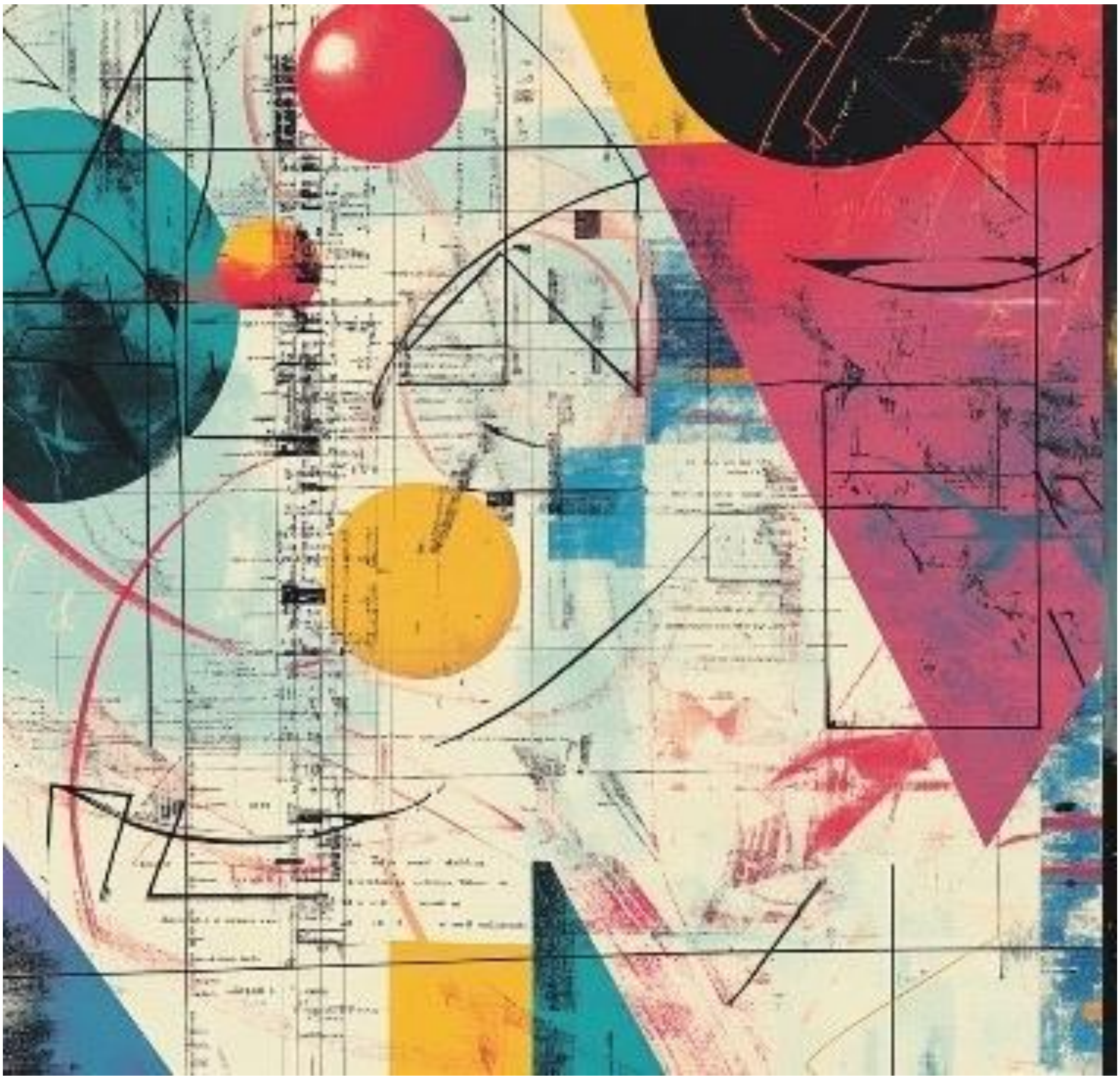
Ирина Евгеньевна Малова – доктор педагогических наук, профессор, 53mira44@yandex.ru, Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского (д. 14, ул. Бежицкая, 241036 Брянск, Россия), старший научный сотрудник Южного математического института Владикавказского научного центра Российской академии наук (53, ул. Ватутина, 362025 РСО-А, г. Владикавказ, Россия); **Irina E. Malova** – Dr. Sci. (Pedagogy), professor Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, (д.14, ул. Бежицкая, 241036 Брянск, Россия), BryanskSouthern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (53, st. Vatutina, 362025 RNO-A, Vladikavkaz, Russia).

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию – 16.09.2024; одобрена после рецензирования – 10.10.2024; принята к публикации – 01.11.2024.

The article was submitted – 16.09.2024; approved after reviewing – 10.10.2024; accepted for publication – 01.11.2024.



Исследования

Researches

2024 · Том 1 · № 4

Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 25–33.
Education Research Environment, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 25–33.

Научная статья[©]
УДК 372.851
https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.48.76.002

Из опыта применения математического моделирования в процессе обучения студентов вузов математическим дисциплинам прикладного характера

Светлана Александровна Парыгина
Череповецкий государственный университет,
Череповец, Россия
saparygina@chsu.ru

Svetlana A. Parygina
Cherepovets State University,
Cherepovets, Russia
saparygina@chsu.ru

Аннотация. В статье рассмотрен пример применения реального математического моделирования в ходе обучения студентов разных направлений подготовки прикладным математическим дисциплинам, а именно: построение регрессионной математической модели, позволяющей регулировать влияние входных переменных на выходную переменную, с целью уменьшения такого распространенного дефекта как коррозия металла. В ходе моделирования выделено 10 значимых производственных факторов, выбрано уравнение множественной линейной регрессии этих факторов на выходную переменную Y, определяющую процент брака по причине коррозии. Значение коэффициента детерминации, равное 0,96, говорит о достаточно высокой точности моделирования. Детальное проникновение в суть построения математической модели позволяет студентам лучше понять алгоритм и нюансы реального математического моделирования.

Ключевые слова: математическое образование, практикоориентированное обучение студентов, математическое моделирование, регрессионная математическая модель

Для цитирования: *Парыгина С. А.* Из опыта применения математического моделирования в процессе обучения студентов вузов математическим дисциплинам прикладного характера // *Пространство педагогических исследований*. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 25–33. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.48.76.002

The use of mathematical modeling in the process of teaching applied mathematical disciplines to university students

Abstract. The article considers using real mathematical modeling in the course of teaching students of different fields of study in applied mathematical disciplines, namely, building a regression mathematical model that allows regulating the influence of input variables on the output variable in order to reduce such a common defect as metal corrosion. During the process of modeling, 10 significant production factors were identified, an equation for multiple linear regression of these factors on the output variable Y was selected, which determines the percentage of defects due to corrosion. The value of the determination coefficient, equal to 0.96, indicates a fairly high accuracy of modeling. Detailed insight into the essence of constructing a mathematical model improves the students comprehension of the algorithm and real mathematical modeling nuances.

Keywords: mathematical education, practice-oriented teaching of students, mathematical modeling, regression mathematical model

For citation: *Parygina S. A.* The use of mathematical modeling in the process of teaching applied mathematical disciplines to university. *Education Research Environment*, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 25–33. (In Russian). https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.48.76.002

Введение

На современном этапе развития предметного вузовского образования остро встает вопрос взаимодействия и взаимопроникновения теории и практики. Особенно это актуально в отношении математического образования, так как именно прикладные математические методы (в частности методы обработки данных разной природы) наиболее универсальны и востребованы в практических исследованиях. Кроме того, в данном случае ярко проявляется и междисциплинарный характер этого взаимодействия, когда студенты IT-направлений подготовки могут эффективно с точки зрения результативности самого исследования и с пользой для себя применять свои знания и умения наравне со студентами той области знаний, в которой проводится сам эксперимент, например, металлургии, химии, техносферной безопасности и мн. др.[1]

Рассмотрим в качестве примера такого взаимодействия применение прикладной исследовательской работы на тему: «Построение математической модели дефекта коррозии на холоднокатаном прокате в зависимости от влияния значимых производственных факторов», – в процессе обучения дисциплинам: «Математические методы обработки экспериментальных данных» (для студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информати-

[1] Нахман А. Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы // Научное обозрение. Педагогические науки. 2017. № 3. С. 71–79; Пушкарева Т. П. Математическое моделирование как необходимый компонент математической подготовки // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 5. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=15184 (дата обращения: 14.10.2024).

ка») и «Анализ данных при производстве прокатной продукции» (для студентов направления подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»).

Основная часть

1. Построение математической модели

В настоящее время статистика утверждает, что экономические потери от коррозии металлов составляют от 4 до 6 % ВВП для развитых стран. По данным экспертов, в России потери от коррозии металлов под воздействием климата составляют около 3 % ВВП. Снижение коррозионных потерь может решить ряд задач, которые относятся к экономическим, экологическим, социальным, ресурсным, а также энергетическим эффектам. Зачастую такой дефект как коррозия металла обнаруживается при производстве холоднокатаного проката (ПХП).

Методы, с помощью которых можно провести анализ и моделирование производственных данных, могут быть самые разные: от проверки гипотез и корреляционно-регрессионного анализа до машинных методов обработки информации, таких как кластерный анализ и нейронный сети. Однако при выборе инструмента статистического анализа нужно руководствоваться целью и задачами исследования, а также ориентироваться на тематическое планирование дисциплины, в рамках которой реализуется это исследование.

Данная (в большей степени математическая) теоретикоориентированная часть нашего исследования актуальна для студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Обобщенная задача нашего исследования заключалась в том, чтобы выявить те производственные переменные, которые оказывают значимое влияние на количество брака и провести анализ зависимостей количества брака от этих переменных, т. е., выражаясь математически, построить уравнение регрессии количества брака по причине коррозии на значимые производственные переменные. Имея такое уравнение, мы получаем возможность, регулируя значения производственных переменных, добиваться уменьшения процента брака.

Введем обозначения. Процентное значение бракованной продукции будем называть выходной или зависимой переменной и обозначать Y. Значения этой переменной вычисляются путем нахождения отношения количества бракованной продукции к количеству произведенной продукции. Реальные производственные переменные будем называть входными или независимыми переменными и обозначать $X_1, \ldots, X_p$.

Переменная Y – это случайная величина, имеющая при заданных значениях независимых переменных определенное распределение, причем оптимальным решением для объясненной части случайной величины Y является условное математическое ожидание $M_{X_1,\ldots,X_p}(Y)$, полученное в соответствие со значениями независимых переменных $X_1, \ldots, X_p$. Таким образом, в общем виде, регрессионная математическая модель имеет вид:

$$Y = M_{X_1,\ldots,X_p}(Y) + \varepsilon,$$

где ε – это случайная величина, определяющая погрешность математической модели[1].

Математическое моделирование проводилось в несколько этапов. Цель первого этапа – определить, какие из входных переменных значимо влияют на выходную переменную. Для решения этой задачи применялся корреляционный анализ, в ходе которого, во-первых, были выявлены входные переменные, статистически значимо связанные с выходной переменной; а, во-вторых, с помощью такого графического инструмента как диаграмма рассеяния, априори определен характер этих зависимостей: линейный или нелинейный. Значимость выборочного коэффициента корреляции для каждой пары переменных выявлялась с помощью критерия Стьюдента.

Исходя из линейного характера связей между выходной переменной и значимыми входными переменными (что подтвердит далее вид диаграмм рассеяния), на втором этапе был определен тип регрессионной модели – множественная линейная регрессия, общее уравнение которой имеет вид:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \ldots + a_\mathrm{p} \cdot X_\mathrm{p} + \varepsilon\,,$$

где, переменные $X_1, \ldots, X_p$ – это независимые переменные; переменная Y – это зависимая переменная; числа $a_0, a_1, \ldots, a_p$ – коэффициенты регрессии; величина ε – случайная ошибка (погрешность модели).

Для оценки неизвестных коэффициентов регрессии был применен метод наименьших квадратов (МНК).

Качество регрессионной модели оценивалось с помощью коэффициента детерминации R^2. Коэффициент детерминации предназначен для определения той доля вариации выходной переменной Y, которая учтена в нашей модели, и обусловлена влиянием на нее входных переменных:

[1] Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука; Института математики, 1997. 772 с.; Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов: в 2 т. Т. 1: *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Теория вероятностей и прикладная статистика. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 656 с.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{p}(y_i - \widetilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{p}(y_i - \bar{y})^2},$$

где, y_i – значения наблюдаемой переменной; $\bar{y}$ – среднее значение по всем наблюдаемым значениям переменной Y; $\widetilde{y}_1$ – модельные значения переменной Y, построенные с помощью оценок МНК.

Чем ближе значение коэффициента детерминации R^2 к единице, тем лучше регрессионная модель описывает практические данные, тем ближе точки, расположенные на диаграмме рассеяния, расположены к линии регрессии.

2. Реализация экспериментальной части исследования

Данная прикладная практикоориентированная часть нашего исследования в большей степени актуальна для студентов направления подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование».

Исходная выборка представляла собой значения 7146 выборочных данных (единиц продукции), для каждой из которых были измерены значения 109 переменных (параметров, «снятых» при производстве холоднокатаного проката). Первичный анализ данных заключался в проведении так называемой предобработки исходного массива данных, предполагающей работу с ошибочными данными, переменными с большим количеством пропусков и с переменными, имеющими нулевую вариацию. В итоге база данных для анализа частично сократилась до 7080 выборочных данных (единиц продукции), для каждой из которых были измерены значения 106 входных переменных. В ходе первичного анализа данных значения входных переменных были стандартизированы, это позволило перейти к единому вероятностному пространству.

В ходе реализации первого этапа моделирования с учетом шкал, в которых измерены переменные, были вычислены соответствующие коэффициенты корреляции между каждой переменной из массива входных переменных и выходной переменной Y. В итоге для дальнейшего анализа были оставлены только те входные переменные, которые продемонстрировали статистически значимую корреляционную зависимость для $\alpha \leq 0{,}05$. Таких переменных получилось десять:

X_4 – определяет межоперационные сроки хранения;

X_{16} – это среднеквадратическое отклонение производственного фактора, определяющего вытяжку, %;

X_{31} – определяет работу правильно тянущей машины (ПТМ) (переменная принимает только 2 значения: 100 – машина работает, 0 – машина не работает);

X_{61} – давление после насоса 1, бар;

X_{65} – давление после насоса 2, бар;

X_{66} – давление после насоса 3, бар;

X_{80} – давление эмульсии 1, кгс/см^2;

X_{81} – давление эмульсии 2, кгс/см^2;

X_{84} – расход эмульсии на 1 пог. м полосы, л/м;

X_{103} – это среднее значение производственного фактора, определяющего расход эмульсии, м^3/час.

На следующем шаге моделирования были построены диаграммы рассеяния для количественных переменных, например, рассмотрим две из них (см. рис. 1 и 2).

Множества точек на рисунках 1 и 2 аппроксимируются прямыми линиями, это говорит о том, что входные переменные с выходной переменной связаны линейной зависимостью (в остальных случаях ситуация аналогичная). Следовательно, в качестве корректной и оптимальной регрессионной модели для этих переменных, действительно, с уверенностью можно выбрать множественную линейную регрессию.

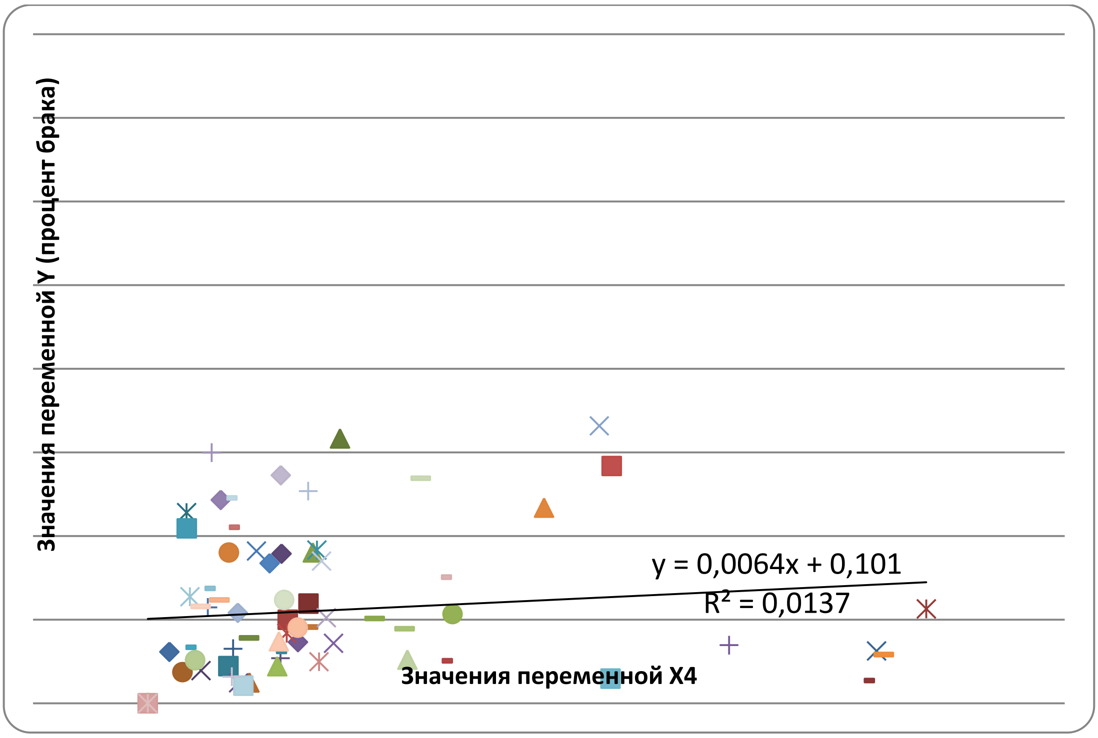


Рис. 1. Диаграмма рассеяния для переменных X_4 и Y

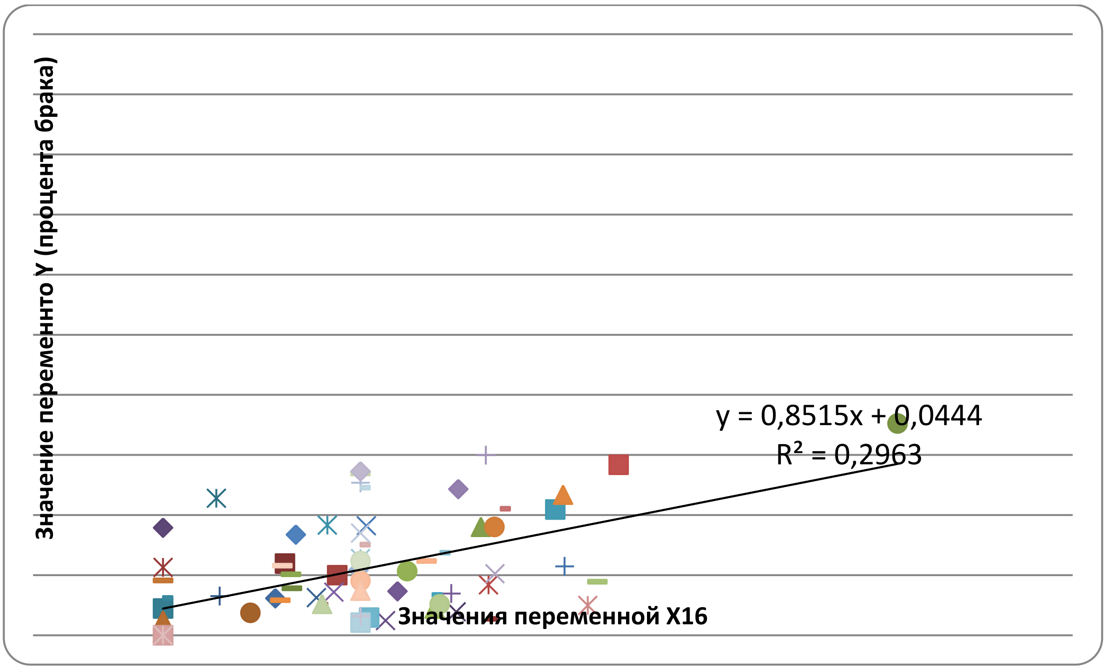


Рис. 2. Диаграмма рассеяния для переменных X_{16} и Y

В результате применения электронного статистического пакета было построено уравнение множественной линейной регрессии процента брака по причине коррозии на значимые производственные переменные, которое имеет вид:

$$Y = -0{,}0475332284373835 + 0{,}00035 \cdot \mathrm{X}_4 + 0{,}00679 \cdot \mathrm{X}_{16} +$$
$$+0{,}00006 \cdot X_{31} - - 0{,}00097 \cdot X_{61} - 0{,}00011 \cdot X_{65} + 0{,}00099 \cdot X_{66} +$$
$$+0{,}00250 \cdot X_{80} - \; 0{,}00044 \cdot X_{81} + + 0{,}00033 \cdot X_{84} + 0{,}00011 \cdot X_{103}.$$

Коэффициент детерминации составил $R^2 = 0{,}96$. Это свидетельствует о достаточно высокой точности построенной модели. Таким образом, найденная статистическая зависимость между 10-ю входными переменными (производственными факторами) и выходной переменной Y имеет небольшую погрешность.

Подбирая значения десяти входных переменных X_4, X_{16}, X_{31}, X_{61}, X_{65}, X_{66}, X_{80}, X_{81}, X_{84}, X_{103} таким образом, чтобы значение выходной переменной Y стремилось к нулю, мы будем уменьшать количество брака на металлургическом производстве, возникающего по причине коррозии. Таким образом, на примере реального математического моделирования студенты двух направлений подготовки могут проследить пошагово этапы прикладного математического исследования реального металлургического процесса, что, без сомнения, способствует лучшему усвоению ими соответствующих прикладных математических дисциплин.

Заключение

В статье на примере построения прикладной математической модели, позволяющей регулировать влияние входных переменных при производстве холоднокатаного проката с целью уменьшения такого дефекта как коррозия металла, наглядно показано, как можно реализовать взаимодействие студентов IT-направлений подготовки со студентами-будущими металлургами в рамках преподавания у них прикладных математических дисциплин. Особенно ценно то, что это исследование проводилось на реальных производственных данных, что напрямую способствует формированию у студентов практикоориентированных навыков и умений. Значение коэффициента детерминации, равное 0,96, говорит о достаточно высокой точности моделирования, что очень важно отслеживать при проведении студентами реальных исследований в будущем.

Список литературы / References

Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука; Институт математики, 1997. 772 с.

Borovkov A. A. Mathematical statistics. Novosibirsk: Nauka; Institute of Mathematics, 1997. 772 p. (In Russian)

Нахман А. Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы // Научное обозрение. Педагогические науки, 2017, № 3, С. 71–79.

Nakhman A. D. Competence of mathematical modeling in the context of the modern educational paradigm // Scientific Review. Pedagogical Sciences, 2017, No. 3, pp. 71–79. (In Russian)

Прикладная статистика. Основы эконометрики: учебник для вузов: в 2 т. Т. 1: Айвазян С. А. Мхитарян В. С. Теория вероятностей и прикладная статистика. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 656 с.

Applied statistics. Fundamentals of econometrics: textbook for universities: in 2 volumes. Volume 1: Ayvazyan S. A., Mkhitaryan V. S. Probability theory and applied statistics. Moscow: UNITY-DANA, 2001. 656 p. (In Russian)

Пушкарева Т. П. Математическое моделирование как необходимый компонент математической подготовки // *Современные проблемы науки и образования*, 2014, № 5. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=15184 (дата обращения: 14.10.2024).

Pushkareva T. P. Mathematical modeling as a necessary component of mathematical training // *Modern problems of science and education*, 2014, No. 5. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=15184 (date of access: 14.10.2024). (In Russian)

ISSN 3034-1760

Сведения об авторах

Светлана Александровна Парыгина – кандидат психологических наук, доцент, saparygina@chsu.ru, Череповецкий государственный университет (5, ул. Луначарского, 162600 Череповец, Россия); **Svetlana A. Parygina** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, saparygina@chsu.ru, Cherepovets State University (5, Lunacharsky pr., 162600 Cherepovets, Russia).

Статья поступила в редакцию – 15.09.2024; одобрена после рецензирования – 15.10.2024; принята к публикации – 01.11.2024.
The article was submitted – 15.09.2024; approved after reviewing – 15.10.2024; accepted for publication – 01.11.2024.

Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 34–52.
Education Research Environment, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 34–52.

Научная статья
УДК 372.851
https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.93.56.003

О методике обучения дисциплине «Элементы теории формальных языков» будущих инженеров

Евгений Александрович Перминов
Уральский технический институт связи и информатики,
Екатеринбург, Россия
perminov_ea@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8807-2476

Evgeniy A. Perminov
Ural Technical Institute of Communications and Informatics,
Ekaterinburg, Russia
perminov_ea@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8807-2476

Аннотация. В цифровую эпоху в процессе автоматизации, роботизации различных отраслей производства и внедрения в него искусственного интеллекта используется уже трудно обозримое множество языков программирования. В результате в подготовке будущих инженеров все большое значение приобретает теория формальных языков, лежащая в основе разработки языков программирования. Незнание теории формальных языков стало причиной многих ошибок в разработке и использовании языков программирования в высокотехнологичных отраслях производства. Поэтому необходимо внедрение в содержание подготовки будущих инженеров дисциплины «Элементы теории формальных языков» для овладения ими теорией и практикой языков программирования. Установлено, что в методической литературе не разработаны эффективные методы обучения будущих инженеров формальным языкам.

Цель статьи заключается в исследовании важных математических и методических аспектов обучения теории формальных языков будущих инженеров.

Ведущую роль в исследовании играли методология дискретной математики и абстрактной алгебры, культурологический подход и методика преемственности в обучения между школой и вузом в содержании подготовки будущих инженеров.

Результаты исследования. Охарактеризована культурологическая роль дискретной математики в современной теории формальных языков. На основе анализа избранных трудов В. М. Глушкова, Д. Кнута и других ученых исследована фундаментальная роль формальных языков абстрактной алгебры в обучении теории формальных языков.

Охарактеризованы алгебраические аспекты методики обучения теории формальных языков и грамматик и роль в этой методике классических понятий абстрактной алгебры и их свойств. На основе этого изложены элементы методики преемственности в обучении элементам теории формальных языков будущих инженеров. В этих элементах важную роль играют различные трактовки понятия «язык» и примеры языков из математики и информатики. Раскрыта важная роль грамматик формальных языков в дальнейшем обучении этой теории.

Результаты статьи имеют важное теоретическое и практическое значение в дальнейшем исследовании проблем методологии обучения будущих инженеров элементам теории формальных языков. Они представляют интерес для преподавателей, ведущих профессиональную подготовку студентов инженерных направлений в сфере автоматизации, роботизации отраслей производства и внедрения в него Искусственного интеллекта.

Ключевые слова: автоматизация и роботизация производства, формальные языки, методика обучения, роль абстрактной алгебры

Для цитирования: *Перминов Е. А.* О методике обучения дисциплине «Элементы теории формальных языков» будущих инженеров // Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 34–52. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.93.56.003

On the methodology for teaching the discipline "Elements of the Theory of Formal Languages" to engineering students

Abstract. In the digital era, in the process of automation, robotization of various industries and the introduction of Artificial Intelligence into it, numerous programming languages are widely applied. As a result, the theory of formal languages that underlies the development of programming languages is becoming increasingly important in the training of engineering students. The nescience of formal languages theory has caused many mistakes in the development and use of programming languages in high-tech industries. Therefore, it is necessary to introduce the discipline "Elements of the Theory of Formal Languages" into the content of the training of future engineers in order to master the theory and practice of programming languages. At the same time, it was established that the methodological literature hasn't developed effective methods for teaching future engineers to formal languages.

The purpose of the article is to investigate important mathematical and methodological aspects of teaching the theory of formal languages to engineering students.

The leading role in the study was played by the methodology of discrete math and abstract algebra. Also, the cultural approach and the methodology of pre-graduation in training between school and university in the content of training future engineers.

Findings. The cultural role of discrete mathematics in the modern theory of formal languages is determined in the article. Based on the analysis of selected works of V.M. Glushkov, D. Knut, and other scientists, the article investigates the fundamental role of formal languages of abstract algebra in teaching the theory of formal languages. Algebraic aspects of teaching methodology of the theory of formal languages and grammars, and the role in this methodology of classical concepts of abstract algebra and their propertieshave also become the subjects of the study. Basing on this, the elements of the methodology of continuity in teaching the elements of the theory of formal languages of future engineers are set out in the article. Various interpretations of the concept of "language" and examples of languages from mathematics, and computer science play an important

role in these elements. The research also states the important role of grammars of formal languages in the further training of this theory.
The findings of the research have important theoretical and practical significance in the further study of the issues of the methodology for teaching future engineers to the elements of the theory of formal languages. They are of interest to teachers conducting the professional training of engineering students in the field of automation, robotization of production industries, and the introduction of Artificial Intelligence into it.
Keywords: automation and robotization of production, formal languages, teaching methodology, role of abstract algebra
For citation: *Perminov E. A.* On the methodology for teaching the discipline "Elements of the Theory of Formal Languages" to engineering students. *Education Research Environment*, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 34–52. (In Russian). https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.93.56.003

Введение

Как обосновано в статье[1], в исследованиях технических науках стал широко использоваться эффект (синергия) взаимодействия дискретного и непрерывного начал моделирования и алгоритмизации с использованием уникальных возможностей современного компьютера. При этом «как уникальный результат синергии формальных языков моделирования и алгоритмизации сформировалась теория формальных языков, ставшая основой разработки языков программирования»[2].

В цифровую эпоху на основе теории формальных языков (ФЯ) разработано уже более восьми тысяч языков программирования, из которых официально зарегистрировано около 700. К сожалению, как подчеркивает видный ученый в области разработки языков программирования Р. Гласс, «рекламный звон вокруг инструментов и методов – это чума индустрии программного обеспечения»[3] . Многие из более двух десятков его книг посвящены тому, как корректно внедрить в индустрию программного обеспечения. При этом важно знать, что сложность программного обеспечения компьютера превосходит более чем на порядок его аппаратную сложность.

Работа компьютера основана на алгоритмах, написанных на том или ином математическом языке. При этом формальные языки и их грамматики играют фундаментальную роль в корректной реализации алгоритма на том или ином языке программирования, что имеет фундаментальное значение в корректной

[1] Перминов Е. А., Тестов В. А. Математизация профильных дисциплин как онова фундаментализации IT- подготовки в вузах // Образование и наука. 2024. № 7(26). С. 12–43.

[2] Там же. С. 28.

[3] Гласс Р. Факты и заблуждения профессионального программирования. Санкт-Петербург: Символ-Плюс, 2007. С. 23.

автоматизации, роботизации современного производства и внедрения в него искусственного интеллекта. Причем это особенно важно в предотвращении серьезных аварий в высокотехнологичных отраслях производства и космосе.

Важно подчеркнуть, что языки программирования – это тоже формальные языки как знаковые системы для планирования поведения компьютера. Знание синтаксиса и семантики формального языка обеспечивает понимание общих идей построения и применения любого языка программирования, что важно в легком и глубоком освоении этого языка будущим инженером. Незнание теории ФЯ стало причиной многих ошибок в разработке и использовании языка программирования в высокотехнологичных отраслях производства.

Теория формальных языков составляет фундамент тех методов, которые получили широкое практическое применение в области разработки и реализации языков программирования. Поэтому значение формальных языков в подготовке будущих инженеров заключается в том, что, изучив семантику, синтаксис формальных конструкций одного языка, инженер сможет быстрее переключаться с одного языка программирования на другой, научится владеть несколькими важными языками программирования в своей профессиональной области. Это, в свою очередь, очень важно для более качественно решения поставленных перед ним задач автоматизации и роботизации производства и внедрения в него искусственного интеллекта. Будущий инженер, изучивший теорию ФЯ, будет обладать большим преимуществом по сравнению с другими инженерами, которые данную дисциплину не изучали.

Как показывает анализ нормативной и учебной литературы подготовки будущих инженеров, теория формальных языков как дисциплина не внедрена в содержание их подготовки (кроме инженеров-программистов). Отдельные разрозненные фрагменты этой теории можно обнаружить лишь в содержании курсов дискретной математики и некоторых специальных дисциплин их подготовки. Ситуацию усугубляет и то, что в обучении математике «традиционные математические курсы для не математиков, (в том числе инженеров – *прим. автора*)… сфокусированы почти исключительно на механической наработке рудиментарных вычислительных навыков, без какого-либо серьезного понимания подлинной структуры предмета, его приложений, его текущего состояния или более широкого контекста»[1].

Теории полугрупп, групп, колец и другие классические области абстрактной алгебры, известной также под названиями современной и общей, имеют фундаментальное значение в исследованиях технических наук с

[1] Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. Небеса падают // Математика для нематематиков. Доклады Российской академии наук Математика Процессы управления. 2023. Т. 511. С. 150.

использованием теории ФЯ. Например, абстрактная алгебра имеет фундаментальное значение в разработке важных в технических науках *формальных языков* алгебраической (абстрактной) теории автоматов[1], теории управления[2], алгебраической теории синтеза сложных систем[3], обработке данных в искусственном интеллекте[4] и др. Как будет обосновано в методике обучения теории ФЯ, необходимо предусмотреть обучение классическим понятиям и методам абстрактной алгебры.

Благодаря системам компьютерной математики (СКМ) инженеры уже не решают вручную системы линейных уравнений, вычисляют интегралы или строят графики функции, кроме занятий в аудитории. Поэтому в подготовке будущих инженеров уже давно не используются рудиментарные вычислительные инструменты (логарифмическая линейка, таблицы значений тригонометрических функций и др.). Становится очевидным, что без большого количества инженеров, глубоко понимающих формальные языки математики, и в том числе теорию формальных языков, уже невозможно просто сохранять (не говоря уже о том, чтобы развивать) многие из современных высоких производственных технологий. В том числе – без учета фундаментальной роли теории формальных языков как основы разработки и корректного использования СКМ, лежащих в основе формирования у будущих инженеров важных вычислительных умений и навыков.

Значение теории формальных языков фундаментально в разработке компьютерных технологий функционирования высокотехнологичных отраслей производства. В частности, ее фундаментальные результаты лежат в основе корректного использования программного обеспечения их функционирования на основе работы всех блоков компилятора как компьютерной программы, производящей перевод текста, написанного на исходном языке в эквивалентный текст на другом языке.

Важно подчеркнуть, что теория ФЯ как основа программного обеспечения современных суперкомпьютеров уже радикально повлияла на все приложения математики и информатики в технических науках. В результате исследований

---

[1] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи математических наук. 1961. Вып. 5 (101). 62 с.

[2] Шайкин М. Е. Некоторые вопросы применения алгебраических методов в задачах анализа стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1998. Вып. 11. С. 184–194.

[3] Муха Ю. П., Авдеюк О. А., Королева И. Ю. Алгебраическая теория синтеза сложных систем. Волгоград: Политехник, 2003. 318 с.

[4] Кулик Б. А., Зуенко А. А., Фридман А. Я. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2010. 235 с.

ISSN 3034-1760

Д. Кнута [1], М. Брой[2], М. В. Швецкого[3], Н. И. Рыжовой[4] и других теория формальных языков была названа одной из важнейших составляющих оснований информатики.

Таким образом, является актуальной ***проблема*** исследования методологии обучения будущих инженеров элементам теории формальных языков.

Анализ этой проблемы показывает, что в учебной литературе отсутствуют специальные курсы обучения теории ФЯ для будущих инженеров. Некоторые разрозненные элементы этой теории можно обнаружить в курсах дискретной математики для будущих инженеров, поэтому и не предложены эффективные методы обучения формальным языкам.

По-видимому, будущим инженерам не стоит начинать свой путь в программировании (на этапе обучения в профильных классах школы) с изучения трудных для их восприятия абстрактных понятий и структур формальных языков. Тем не менее, важные вопросы пропедевтики обучения в школе элементам теории ФЯ на основе обучения языкам программирования отражены в широко известных учебниках по информатике Босовой Л. Л. и Босовой А. Ю., Гейна А. Г., Угринович Н. Д. и других авторов.

Таким образом, является актуальной ***цель*** статьи, заключающаяся в исследовании важных математических и методических аспектов обучения теории формальных языков будущих инженеров.

Ведущую роль в исследовании играли методология дискретной математики, абстрактной алгебры, культурологический подход и методика преемственности обучения между школой и вузом в содержании подготовки будущих инженеров.

Ограничения исследования связаны с проблемой обучения будущих инженеров грамматике формальных языков, которую целесообразно исследовать на основе углубленного обучения языкам программирования, теории автоматов и формальным системам искусственного интеллекта.

---

[1] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1: Основные алгоритмы. Москва: Мир, 1976. 736 с.; Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2: Получисленные алгоритмы. Москва: Мир, 1977. 724 с.; Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3: Сортировка и поиск. Москва: Мир, 1978. 844 с.

[2] Брой М. Информатика. Основополагающее введение: в 4 ч. Ч. 1. Москва: Диалог-МИФИ, 1996. 299 с.

[3] Швецкий М. В. Методическая система фундаментальной подготовки будущих учителей информатики в педагогическом вузе в условиях двухступенчатого образования: автореф. дис. … д-ра пед. наук. Санкт-Петербург, 1994. 36 с.

[4] Рыжова Н. И. Элементы теоретической информатики: Упражнения по математ ическим основаниям информатики: формальные языки. Часть I. Санкт-Петербург: РГПУ, 2000. 262 с.

Основная часть

I. *О различных математических аспектах обучения теории формальных языков будущих инженеров*

1. ***О культурологической роли дискретной математики (ДМ)***. Закономерно, что в математике и информатике существуют различные представления о теории формальных языков. В учебном пособии курс по теории ФЯ «составляет теоретическую основу для разработки языков программирования и конструирования компиляторов и является классическим элементом системы подготовки специалистов в области информатики»[1]. Во многих учебных пособиях отражена роль формальных языков как основы теории автоматов, имеющей фундаментальное значение в автоматизации высокотехнологичных отраслей производства. В многочисленной учебной литературе теория формальных языков предстает как основой широкого внедрения систем компьютерной математики (СКМ) в исследования практически всех наук и даже искусства.

Независимо от различных представлений о теории формальных языков в обучении этой теории определяющую роль играет раздел прикладной дискретной математики «Математические основы информатики и программирования», основным содержанием которого являются формальные языки и грамматики, алгоритмические системы, языки программирования, структуры и алгоритмы обработки данных, теория вычислительной сложности (см. тематику журнала «Прикладная дискретная математика»).

В свое время выдающийся ученый в области информатики А. П. Ершов подчеркивал базовую роль дискретного анализа (в современной терминологии ДМ – Е. П.) в доведении системы «законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах»[2]. Культурологическая роль ДМ в обучении теории формальных языков выявляется при проведенном в монографии[3] анализе функций дискретной математики в разработке и совершенствовании систем компьютерной математики, компьютерных технологий. Разработка и совершенствование СКМ и КТ осуществляется на основе теории формальных языков. При этом доминирующим в современной теории формальных языков является алгебраический подход, основанный на алгебраических структурах ДМ. Кроме того, важную роль в разработке этой теории играют логические, алгоритмические и комбинаторные схемы ДМ (как методы по-

[1] Соколов В. А. Введение в теорию формальных языков. Ярославль: ЯрГУ, 2014. С. 2.

[2] Ершов А. П. Избранные труды. Новосибирск: Наука, 1994. С. 294.

[3] Перминов Е. А. Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования. Екатеринбург: Издательство Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2019. 287 с.

ISSN 3034-1760

знания) и теория графов (там же). В частности – комбинаторика слов формального языка[1]. Поэтому закономерно, что вначале «теория формальных языков возникла на стыке математической логики, теории алгоритмов и алгебры[2]. Это особенно важно учесть в содержании подготовки будущих инженеров, в своем роде *цифровых полиглотов*, умело использующих различные языки программирования.

Как отмечается в уже ранее процитированной работе[3] использование термина «цифровой полиглот» оправданно по аналогии с термином «языковой полиглот», как знатока многих иностранных языков[4]. Подготовка таких инженеров, знатоков языков программирования осуществляется в рамках группы направлений «Инженерное дело,технологии и технические науки», в том числе в связи с внедрением в ее содержание формальных систем искусственного интеллекта.

На рубеже тысячелетий общекультурной основой формирования теории ФЯ стали компьютерные науки (Computer Science). Языки программирования и трансляторы к ним, кодирование информации, сжатие и восстановление данных – далеко не полный перечень направлений компьютерных наук, в исследованиях которых фундаментальную роль играет теория формальных языков.

2. ***О роли языка абстрактной алгебры.*** Анализ избранных трудов В. М. Глушкова[5], выдающегося ученого в области кибернетики, информатики и абстрактной алгебры, показывает, что в теории ФЯ велика роль абстрактной алгебры. Важно отметить, что «доминирующим в современной теории формальных языков является алгебраический подход»[6]. Первоначально формальный язык определяется как «произвольное подмножество свободного моноида (являющегося полугруппой с единицей. – *Е. П.)*»[7]]. В теории формальных языков основная операция *конкатенации,* т. е. приписывания к слову из букв другого такого слова, точно так же определяется и в теории полугрупп и называется *конкатенацией* элементов (слов) свободной полугруппы[8].

[1] Шур А. М. Комбинаторика слов. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2004. 96 с.

[2] Саломаа А. Жемчужины теории формальных языков. Москва: Мир, 1986. С. 4.

[3] Шур А. М. Комбинаторика слов. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2004. 96 с.

[4] Там же. С. 32.

[5] Глушков В. М. Кибернетика. Вычислительная техника. Информатика. Избранные труды: в 3 т. Киев: Наукова думка, 1990.

[6] Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2001. С. 5.

[7] Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. Москва: Мир, 1985. С. 5.

[8] Там же. С. 23.

Как уже отмечалось во введении, формальные языки абстрактной алгебры играет фундаментальную роль в обучении теории ФЯ. Например, знание формального языка абстрактной теории групп как классического области абстрактной алгебры стало основой формального языка уникальной классификации конечных простых групп с использованием системы компьютерной алгебры GAP (описание которых занимает более 10 тысяч страниц).

К сожалению, существует ряд областей абстрактной алгебры, находящихся за гранью понимания широкого круга инженеров, что препятствует изучению ими теории формальных языков. Среди них – области теории групп и конечных полей, важные в кодировании информации и эксплуатации систем связи[1]. Элементы теории групп и конечных полей используются в трех основных направлениях: кодирование с обнаружением ошибок, кодирование с исправлением ошибок, а также формирование псевдослучайных последовательностей.

Ряд важных понятий абстрактной алгебры могут быть использованы в пропедевтике изучения *грамматики формального языка.* При этом грамматика – это способ точного задания ФЯ.

Важно, что множество элементов той или иной абстрактной алгебры могут быть взяты для изучения понятия *нетерминального* алфавита формального языка. В свою очередь множество операций этой алгебры может быть взято для изучения терминального алфавита этого языка, состоящего из знаков операций определенных на алгебре, скобок и других специальных символов этой абстрактной алгебры. Далее, *правила подстановки* или *преобразования* выражений абстрактной алгебры задают основу для обучения правилам подстановки и вывода грамматики ФЯ. Наконец, аксиомы (тождества и другие условия), определяющие абстрактную алгебру, облегчают изучение начальных или стартовых символов (аксиом) грамматики ФЯ.

В методике обучения семантике формального языка фундаментальную роль играет формирование представлений будущих инженеров о различных содержательных интерпретациях той или иной абстрактной алгебры. Например, об интерпретации алгебры произвольных множеств на языке алгебры высказываний.

В методике обучения теории формальных языков важную роль играет предварительное изучение в школе формальных особенностей, точнее – формальных элементов языка школьной алгебры, раскрывая при этом формальные правила образования его выражений и используя тождества («правила»), лежащие

[1] Власов Е. Г. Конечные поля в телекоммуникационных приложениях. Теория и применение FEC, CRC и М-последовательностей. Москва: ИНФРА-М, 2016. 285 с.

в основе преобразований алгебраических выражений. Отметим, что в книгах[1], для профильного обучения математике в школе осуществлена пропедевтика обучения учащихся формальному языку полугрупп, групп, колец и полей.

II. *Элементы методики преемственности в обучении элементам теории формальных языков.*

Изложим некоторые элементы методики изложения содержания такого обучения.

1. *О различных трактовках понятия «язык».* Как уже отмечалось, накопленный опыт обучения теории формальных языков носит несколько несистематизированный характер и не предложены эффективные методы обучения этой теории.

В методике обучения будущих инженеров элементам теории ФЯ важную роль играют различные трактовки самого понятия языка. В толковых словарях русского языка можно найти несколько толкований (значений) слова «язык». Среди них будет и значение этого слова как средства общения, средства передачи информации. Именно в этом смысле мы будем рассматривать термин «язык».

Традиционная лингвистика как наука о языках предлагает рассматривать понятие языка по крайней мере с двух точек зрения. Во-первых, с точки зрения его *смыслового* содержания, т. е. того, что можно выразить средствами языка и что известно под названием ***семантика языка***. Во-вторых, как совокупность законов, правил образования его *выражений* – слов, высказываний, текстов и средств, регулирующих их использование, что называется ***синтаксисом языка***.

Примеры языков. В качестве ***первого примера*** возьмем *язык алгебры высказываний,* изучаемым на уроках информатики. Для записи выражений этого языка используется прописные буквы латинского алфавита. Выражением этого языка будет формула логики высказываний, образуемая по заранее определенным правилам их образования. Семантический (содержательный) смысл этого выражения определяется интерпретацией (функцией), однозначно придающей ему некоторое смысловое содержание.

Например, пусть дана *формула* $F \equiv A \wedge B \Rightarrow C$, являющаяся выражением языка высказываний. Придадим атомарным (простейшим) формулам этого языка следующие *смысловые* значения:

– A есть высказывание «натуральное число a делится нацело на 2»;

---

[1] Перминов Е. А. Дискретная математика. Учебное пособие для 8–9 классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург: ИРРО, 2004. 206 с.; Деменчук В. В. На пороге алгебры. Минск: Вышэйшая школа, 1987. 144 с.: Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. Москва: Мир, 1979. 260 с.

– B есть высказывание «натуральное число a делится нацело на 3»;

– C есть высказывание «натуральное число a делится нацело на 6».

Применив к этим высказываниям имеющиеся в формуле логические операции конъюнкции $\land$ и импликации $\Rightarrow$, получим интерпретацию или содержание этой формулы. Иными словами, конкретное высказывание, являющееся значением всей формулы. А именно, получим высказывание «Если натуральное число a делится нацело на 2 и это число делится нацело на 3, то оно делится нацело на 6». Естественно, можно придать этой формуле $F \equiv A \land B \Rightarrow C$ другой смысл (содержание).

Вторым примером будет *язык программирования Паскаль.* Для записи выражений этого языка используется набор символов называемый его алфавитом. Алфавит языка состоит из прописных и строчных букв латинского языка, арабских цифр, знаков арифметических операций, равенства и сравнения $=, <, >$, различных скобок, разделителей : ; . , и некоторых других специальных символов.

В языке Паскаля есть другие служебные слова и также слова-идентификаторы из латинских букв, цифр и символа « ». Выражением (фразой) языка Паскаль является синтаксически правильная программа, написанная на алфавите этого языке. Смысл (значение) выражений языка в этом случае определяется компилятором Паскаля и представляет собой вычислительный процесс, происходящий в компьютере при выполнении откомпилированной программы.

В качестве ***третьего примера*** рассмотри *язык химических формул.* Алфавит этого языка, во-первых, образуют названия химических элементов, обозначаемых одной или двумя латинскими буквами названия этого элемента. Выражениями этого языка являются химические формулы, например CO_2 и H_2SiO_3. Множеством значений (смыслов) языка химических формул является множество химических веществ. Так, значением приведенного выше выражения является, как известно, углекислый газ и кремниевая кислота.

В качестве ***четвертого примера*** *рассмотрим русский язык.* Как и многие естественные языки, русский язык сложен по своему строению, но его можно рассматривать на нескольких уровнях. На первом, наиболее простом, уровне выражением языка можно считать слово, на другом, более сложном, – синтаксически правильное предложение русского языка. Возможны и другие уровни рассмотрения русского языка, как более «мелкие», так и более «крупные».

При этом ***синтаксис*** языка как совокупность законов, правил образования его *выражений* – слов, высказываний, текстов и регулирующих их использование очень сложен по своей структуре. Еще более сложена ***семантика*** языка как множество смыслов слов языка, которая в полном объеме не определена до конца даже в различных словарях. Несомненно, особенно сложные синтаксис и семантика естественных языков, например, русского.

Функции, которые по выражению языка определяют его значение или, наоборот, некоторый смысл, облекают в форму предложения, формируются в процессе изучения языка и фактически являются для человека «встроенными». Приведенные примеры показывают, каковы же общие моменты в приведенных выше примерах, и они касаются способа построения выражений. Во всех случаях фиксируется некоторый конечный набор исходных символов языка, являющихся его алфавитом. Выражением или словом языка является некоторая (но не любая) последовательность символов алфавита или более сложных выражений, составленных из них. Этот вывод приводит к следующим определениям.

2. *О методике обучения понятию формального языка.*

Понятие формального языка

Определение 1. *Алфавитом* языка $\sum$ называется непустое конечное множество символов («букв» языка). С*ловом* (цепочкой) над алфавитом $\sum$ называется конечная последовательность элементов $\sum$. Такие последовательности принято записывать без запятой.

Например, если алфавит $\sum = \{a, b\}$, то $abba$, abb, a – слова над $\sum$. *Длина* слова или цепочки w – это количество символов в ней, обозначаемое через $|\omega|$. *Пустую цепочку* - цепочку нулевой длины обозначают через ε. Множество всех цепочек над $\sum$ обозначается через $\sum^*$, а множество всех непустых цепочек над $\sum$ – через $\sum^+$.

Мы готовы ввести основное определение.

Определение 2. *Формальным языком* над $\sum$ называется подмножество в $\sum^*$.

Таким образом, язык – это множество слов (цепочек).

Приведем примеры формальных языков, которые отражают некоторые конструкции языков программирования.

Пример 1. *Языка цепочек сбалансированных скобок* (*скобочный язык)* C. Алфавит языка C состоит из четырех символов – скобок (и) скобок [и]. Разумеется, понятно, какие цепочки принадлежат этому языку, а какие – не принадлежат. Например, цепочки ( ) , (( )), [ ] , [ ][ ], [[ ]] принадлежат C, а цепочки)), ( ], []], [, (][не принадлежат C. Тем не менее нам понадобится строгое определение *сбалансированной цепочки* скобок. Наиболее удобен рекурсивный вариант ее определения.

1. Пустая цепочка является сбалансированной.

2. Если цепочки скобок u и v сбалансированы, то цепочки (u), $[u]$, uv также сбалансированы.

3. Других сбалансированных цепочек скобок нет.

Пусть даны цепочки скобок $u = [(\,)]$, $v = ([\,])$. Тогда цепочка $uv = uv = [(\,)]([\,])$ тоже сбалансирована, а цепочка $([(\,)]([\quad])$ не сбалансирована (есть лишняя левая скобка (.

Пример 2. *Язык двоичных чисел.* Алфавит состоит из 0,1 и десятичной точки. Цепочки языка имеют вид $u, u.v,$ где u и v – произвольные последовательности нулей и единиц. Например, $0, 10, 101, 10.11\ 0.101$.

Заметим, что в этом языке есть цепочки, целая часть которых начинается нулем, а также цепочки, дробная часть которых нулем заканчивается. Если дополнительно потребовать, чтобы целая часть начиналась единицей, а дробная единицей заканчивалась, то получится новый язык.

Пример 3. *Язык арифметических выражений.* Этот язык будет содержать арифметические выражения, построенные из символа x, который символизирует переменную или константу, знаков операций $+$ и $*$ с обычным приоритетом скобок. Нам понадобится строгое определение.

1. Цепочка x и y – арифметическое выражение.

2. Если цепочки u и v – арифметические выражения, то цепочки $u + v$, $u \cdot v$, $(u), (v)$ также являются арифметическими выражениями.

3. Других арифметических выражений нет.

Приведем примеры цепочек из этого языка:

$$(x + y) \cdot x,\ \ x \cdot (x + y),\ \ (x + y) \cdot (x + y).$$

Определим важное понятие, относящееся к цепочкам (словам) формального языка.

Определение 3. Пусть w – цепочка над некоторым алфавитом. Если $w = uv$ для некоторых (возможно, пустых) цепочек u и u, то u называется *сом* w, а v - *суффиксом* w. Префикс (суффикс) цепочки w называется *собственным,* если он отличен от w и пустого цепочки ε.

Например, если $w = abc$, то цепочки $w = abc$, ab, a, ε – префиксы цепочки w, а цепочки abc, bc, c, ε – ее суффиксы. Подчеркнем, что w и ε являются как префиксами, так и суффиксами цепочки w.

3. *Основные операции со словами формального языка и формальными языками.*

Определение 1. Если *x* и *y* – слова в алфавите Е, то слово *xy* (результат приписывания слова *y* в конец слова *x*) называется *конкатенацией (сцеплением)* слов *x* и *y*. Иногда конкатенацию слов *x* и *y* обозначают *x* • *y*.

Пример 1. Пусть дан язык над алфавитом $\sum = \{a, b, c\}$, в котором есть с*лова* $bac, caba$. Тогда $baccaba$ является конкатенацией этих слов.

ISSN 3034-1760

Определение 2. Если x — слово и $n \in N$, то через x^n обозначается слово $\underbrace{x \bullet x \bullet x \ \cdots x}_{n \text{ раз}}$. По определению $x^0 = \varepsilon$ (знак «n раз» читается «равно по определению»). Всюду показатели над словами и символами, как правило, являются натуральными числами.

Пример 2. Если в некотором языке имеется слово $x = mn$, то $x^3 = mnmnmn$.

Определение 3. *Обращением* или *зеркальным образом* (*reversal*) слова w (обозначается w^R) называется слово, составленное из символов слова w в обратном порядке.

Пример 3. Если в некотором языке имеется слово $pqsk$, то его обращением является слово $ksqp$.

Определение 4. Пусть даны языки над алфавитами $\sum_1$ и $\sum_2$. Если отображение φ алфавита $\sum_1$ в алфавит $\sum_2$ удовлетворяет условию $\varphi(x \bullet y) = \varphi x \bullet \varphi y$ для всех слов $x \in \sum_1$ и $x \in \sum_2$ то отображение φ называется *гомоморфизмом (морфизмом).*

Пример 4. Взаимно-однозначным гомоморфизмом является отображение слов русского языка в цепочки из точек и тире азбуки Морзе. В сти, $\varphi(\text{кот} \bullet \text{мышь}) = \varphi\text{кот} \bullet \varphi\text{мышь}$. При этом слова φкот и φмышь таковы:

«–·– ––– –», «–– –·–– –––– – ··–».

Важную роль в дальнейшем обучении теории формальных языков играют различные грамматики ФЯ. Поэтому приведем примеры простых грамматик ФЯ, предварительно определив само понятие его грамматики.

4. *Понятие грамматики формального языка*

Определение. *Грамматикой* формального языка называется четверка $\boldsymbol{G = (\Sigma, N, P, S)}$, где

Σ – *нетерминальный алфавит* (например, буквы алфавита языка)*;*

N – *терминальный алфавит, причем* $N \cap \Sigma = \emptyset$:

P – *правила подстановки или вывода, записываемые в виде* $\alpha \to \beta$ (в математической логике, например, одно из правил $A \Rightarrow B$);

S – начальные или стартовые символы *(аксиомы).*

Пример 1. Множество слов $\sum^+$ языка палиндромов в этом алфавите образуют слова, которое одинаково читаются слева направо и справа налево. Такими словами в русском алфавите являются, например, слова «топот» и «потоп».

Нетерминальный алфавит $\Sigma: \{\to, =\}$. Здесь в качестве алфавита (основных «букв») формального языка выбраны символы $\to, =$

Терминальный алфавит N: $\{a, b\}$;

Здесь в качестве первоначальных терминов (слов) формального языка выбраны символы a, b.

Правила вывода (образования слов языка):

1) $A \to aAa$; 2) $A \to bAb$.

Аксиомы: 1) $abbba = a$; 2) $baaab = b$.

Легко убедиться, что словами языка палиндромов являются любые непустые слова – палиндромы в терминальном алфавите $\Sigma = \{a, b\}$

Пример 2. Приведем пример простой грамматики *подъязыка формального языка школьной алгебры.*

Пусть даны множества:

Терминальный алфавит: $\Sigma = \{a, b\}$;

Нетерминальный алфавит: $N = \{+,\ *,\ (,\ \ ),\ =,\ (\ )^2\}$;

Правила вывода P:

(это правила образования слов, называемых здесь выражениями языка)

$P_1 = \{\, a + b \to b + a,\ a \cdot b \to b \cdot a,\ \ a \cdot b \to a^2\}$;

$P_2 -$ правило подстановки слова в качестве подслова в другое слово.

Например, $a + b \to (\, a + b) + b, (\, a + b) + b \cdot a$.

Аксиомы (тождества для преобразования слов или выражений):

$$S_1 = \{a + b = b + a\};$$
$$S_2 = \{a \cdot b = b \cdot a\};$$
$$S_3 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2.$$

Тогда (Σ, N, P, S) является искомой грамматикой.

Выводы

Обучению теории формальных языков посвящены очень многие учебники для математиков и программистов. В них подробно излагаются не только теория формальных языков, но и грамматики, трансляторы, компиляторы и др. Однако эта теория в условиях доминирования компетентностного подхода (и, как следствие, большого «разнобоя» в формировании ООП и учебных планов) не нашла своего отражения в подготовке будущих инженеров. В то же время она имеет фундаментальное значение в подготовке будущих инженеров по следующим причинам.

Результаты исследования обосновывают вывод о том, что дискретная математика ДМ и в первую очередь ее область абстрактная алгебра являются математической и методической основой обучения теории формальных языков будущих инженеров. Эти дисциплины играют фундаментальную роль как формальная (нормативная) основа корректного использования языков программирования.

ISSN 3034-1760

Результаты исследования о культурологической роли дискретной математики и формальных языков абстрактной алгебры согласуются с заявленной ***целью*** статьи, заключающейся в исследовании важных математических и методических аспектов обучения теории формальных языков будущих инженеров. Поэтому результаты статьи имеют важное теоретическое и практическое значение в дальнейшем исследовании проблем методологии обучения будущих инженеров элементам теории формальных языков.

В дальнейшем исследовании методики обучения теории ФЯ важную роль играет разработка методики внедрения в подготовку будущих инженеров элементов классических теорий полугрупп, групп, колец и полей, лежащих в основе их обучения корректному использованию формальных языков систем компьютерной математики (алгебры) и важным элементам теорий кодирования и криптографии. Также важное значение имеет разработка методической системы математизации профильных дисциплин как основы фундаментализации IT-подготовки будущих инженеров, что особенно важно в фундаментализации их обучения теории ФЯ.

Список литературы / References

Белоусов А. И., Ткачев С. Б. *Дискретная матем*атика. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2001. 744 с.

Belousov A. I., Tkachev S. B. *Discrete Mathematics*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University. 2001. 744 p. (In Russian)

Брой М. *Информатика. Основополагающее введение*. Москва: Диалог-МИФИ, 1996. Ч. 1. 299 с.

Broy M. *Computer Science. Fundamental Introduction*. Moscow: Dialog-MIFI, 1996. Part 1. 299 p. (In Russian)

Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. Небеса падают: математика для нематематиков. *Доклады Российской академии наук. Математика. Процессы управления*, 2023, т. 511, с. 144–160.

Vavilov N. A., Khalin V. G., Yurkov A. V. The sky is falling: mathematics for non-mathematicians. *Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics. Control Processes*, 2023, v. 511, pp. 144–160. (In Russian)

Власов Е. Г. *Конечные поля в телекоммуникационных приложениях. Теория и применение FEC, CRC и M-последовательностей*. Москва: ИНФРА-М, 2016, 285 с.

Vlasov E. G. *Finite fields in telecommunication applications. Theory and application of FEC, CRC and M-sequences.* Moscow: INFRA-M, 2016, 285 p. (In Russian)

Гласс Р. *Факты и заблуждения профессионального программирования*. Санкт-Петербург: Символ-Плюс, 2007. 240 с.

Glass R. *Facts and misconceptions of professional programming*. St. Petersburg: Symbol-Plus, 2007. 240 p. (In Russian)

Глушков В. М Абстрактная теория автоматов. *Успехи математических наук*, 1961, Вып. 5 (101), 62 с.

Glushkov V. M. Abstract theory of automatic machines. *Advances in Mathematical Sciences*, 1961, Issue 5 (101), 62 p. (In Russian)

Глушков В. М. *Кибернетика. Вычислительная техника. Информатика. Избранные труды*. Киев: Наукова думка, 1990.

Glushkov V. M. *Cybernetics. Computer Engineering. Informatics. Selected works*. Kyiv: Scientific Thought, 1990. (In Russian)

Деменчук В. В. *На пороге алгебры*. Минск: Вышэйшая школа, 1987. 144 с.

Demenchuk V. V. *On the threshold of algebra*. Minsk: Higher School, 1987. 144 p. (In Russian)

Ершов А. П. *Избранные труды*. Новосибирск: Наука, 1994. 413 с.

Ershov A. P. *Selected Works*. Novosibirsk: Nauka, 1994. 413 p. (In Russian)

Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ: в 3 т*. Москва: Мир, 1976–1978.

Knut D. *The Art of Computer Programming: in 3 volumes*. Moscow: Mir, 1976–1978. (In Russian)

Кулик Б. А., Зуенко А. А., Фридман А. Я. *Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний*. Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2010. 235 с.

Kulik B. A., Zuenko A. A., Fridman A. Ya. *Algebraic approach to intellectual processing of data and knowledge*. St. Petersburg: Publishing House of the Polytechnic University, 2010. 235 p. (In Russian)

Лаллеман Ж. *Полугруппы и комбинаторные приложения*. Москва: Мир, 1985. 440 с.

Lallemand J. *Semigroups and combinatorial applications*. Moscow: Mir, 1985. 440 p. (In Russian)

Муха Ю. П., Авдеюк О. А., Королева И. Ю. *Алгебраическая теория синтеза сложных систем*. Волгоград: Политехник, 2003. 318 с.

Mukha Yu. P., Avdeyuk O. A., Koroleva I. Yu. *Algebraic Theory of Synthesis of Complex Systems*. Volgograd: Polytechnic, 2003. 318 p. (In Russian)

Перминов Е. А. *Дискретная математика*. Учебное пособие для 8–9 классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург: ИРРО, 2004. 206 с.

Perminov E. A. *Discrete Mathematics*. Textbook for 8–9 grades of secondary comprehensive school. Ekaterinburg: IRRO, 2004. 206 p. (In Russian)

Перминов Е. А., Тестов В. А. Математизация профильных дисциплин как онова фундаментализации IT- подготовки в вузах. *Образование и наука*, 2024, № 7(26), с. 12–43.

Perminov E. A., Testov V. A. Mathematization of specialized disciplines as the basis for fundamentalization of IT training in universities. *Education and Science*, 2024, No. 7(26), pp. 12–43. (In Russian)

Перминов Е. А. *Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования*. Екатеринбург: Издательство Росссийского государственного профессионально-педагогического университета, 2019. 287 с.

Perminov E. A. *Methodological system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical specialties in the aspect of education integration.* Ekaterinburg: Publishing house of the Russian State Professional Pedagogical University, 2019. 287 p. (In Russian)

Рыжова Н. И. *Элементы теоретической информатики: Упражнения по математ ическим основаниям информатики: формальные языки. Часть I.* Санкт-Петербург: Издательство РГПУ, 2000. 262 с.

Ryzhova N. I. *Elements of theoretical computer science: Exercises on the mathematical foundations of computer science: formal languages. Part I.* St. Petersburg: Publishing House of the Russian State Pedagogical University, 2000. 262 p. (In Russian)

Саломаа А. *Жемчужины теории формальных языков*. Москва: Мир, 1986. 159 с.

Salomaa A. *Pearls of the Theory of Formal Languages.* Moscow: Mir, 1986. 159 p. (In Russian)

Соколов В. А. *Введение в теорию формальных языков*. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 208 с.

Sokolov V. A. *Introduction to the theory of formal languages*. Yaroslavl: Yaroslavl State University, 2014. 208 p. (In Russian)

Фрид Э. *Элементарное введение в абстрактную алгебру*. Москва: Мир, 1979. 260 с.

Fried E. *Basic introduction to abstract algebra.* Moscow: Mir, 1979. 260 p. (In Russian)

Шайкин М. Е. Некоторые вопросы применения алгебраических методов в задачах анализа стохастических систем. *Автоматика и телемеханика*, 1998, вып. 11, с. 184–194.

Shaikin M. E. Some issues of application of algebraic methods in stochastic systems analysis. *Automation and Telemechanics*, 1998, issue 11, pp. 184–194. (In Russian)

Швецкий М. В. *Методическая система фундаментальной подготовки будущих учителей информатики в педагогическом вузе в условиях двухступенчатого образования*: дис. ... доктора пед. наук. Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 1994. 480 с.

Shvetskiy M. V. *Methodological system of fundamental training of future computer science teachers in a pedagogical university in the context of two-stage education:* PhD thesis. St. Petersburg: Russian State Pedagogical University named after A. I. Herzen, 1994. 480 p. (In Russian)

Шур А.М. *Комбинаторика слов*. Екатеринбург: Издательство Уральского университета. 2004. 96 с.

Shur A.M. *Combinatorics of words.* Ekaterinburg: Ural University Publishing House. 2004. 96 p. (In Russian)

Информация об авторе

Евгений Александрович Перминов – доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики и физики Уральского технического института связи и информатики (д. 15, ул. Репина, 620109 Екатеринбург, Россия); **Evgeniy A. Perminov** – Dr. Sci. (Education), Associate Professor, Professor of Departments of higher mathematics and physics, Ural Technical Institute of Communications and Informatics (15, Repina st., 620109, Ekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию – 18.09.2024; одобрена после рецензирования – 15.10.2024; принята к публикации – 01.11.2024.

The article was submitted – 18.09.2024; approved after reviewing – 15.10.2024; accepted for publication – 01.11.2024.

Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 53–64.
Education Research Environment, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 53–64.

Научная статья
УДК 372.851
https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

Особенности математического моделирования при обучении теории вероятностей

Наталия Николаевна Яремко
Московский педагогический государственный университет
Москва, Россия
yaremki@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X
Natalia N. Yaremko
Moscow Pedagogical State University
Moscow, Russia
yaremki@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X

Юлия Андреевна Яковлева
Московский педагогический государственный университет
Россия, Москва
mayflower2299@gmail.com, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449
Julia A. Yakovleva
Московский педагогический государственный университет
Москва, Россия
mayflower2299@gmail.com, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые особенности применения метода математического моделирования при обучении школьников теории вероятностей. Выделены основные вероятностные математические модели и их существенные признаки. Охарактеризованы требования, предъявляемые к вероятностной модели (адекватности и достаточной простоты).

Ключевые слова: методика обучения теории вероятностей, математическое моделирование, вероятностная модель, признаки вероятностной модели, адекватность математической модели, достаточная простота математической модели

Для цитирования: *Яремко Н. Н., Яковлева Ю. А.* Особенности математического моделирования при обучении теории вероятностей // Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 53–64. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

Features of the application of mathematical modeling in teaching probability theory

Abstract. The article deals with the features of the application of the mathematical modeling method in teaching probability theory. The main probabilistic mathematical models and their features are highlighted in the article. The requirements for the probabilistic model (adequacy and sufficient simplicity) are also characterized in it.

Keywords: methods of teaching probability theory, mathematical modeling, probabilistic model, signs of a probabilistic model, the requirement of adequacy, the requirement of sufficient simplicity.
For citation: Yaremko N. N., Yakovleva J. A. Features of the application of mathematical modeling in teaching probability theory. *Education Research Environment*, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 53–64. (In Russian). https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

Введение

Одной из приоритетных целей изучения математики в 7–9 классах является «формирование умения распознавать проявления математических понятий, объектов и закономерностей в реальных жизненных ситуациях, проявления зависимостей и закономерностей, формулировать их на языке математики и создавать математические модели, интерпретировать и оценивать полученные результаты»[1]. Основным средством для формирования этих умений является обучение методу математического моделирования.

Сама идея описания на языке математики реальных процессов восходит, по существу, ко временам Ньютона. Но настоящее «рождение» этой методологии пришлось на середину XX века. Это было связано с необходимостью изучения процессов, воспроизводство которых в эксперименте очень дорого, опасно или невозможно (процессы, протекающие в ядерном реакторе, возвращение тела из космоса в земную атмосферу и пр.). С появлением и развитием ЭВМ стало понятно, что это не только средства, позволяющие ускорить громоздкие вычисления, но и принципиально новый вид экспериментальной установки, возможности которой позволяют воспроизводить, имитировать с достаточно большой степенью детализации процессы, происходящие в окружающем мире.

Одним из основоположников современного математического моделирования является советский и российский математик А. А. Самарский[2]. Его методы, в основе которых лежит триада «модель – алгоритм – программа», признаны во всем мире и применяются для моделирования самых сложных процессов. Первым этапом математического моделирования по А. А. Самарскому является выбор (или построение) математической модели – «эквивалента» изучаемого

[1] Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень): для 5–9 классов образовательных организаций. Москва: Институт стратегии развития образования, 2023. 106 с.

объекта, который в математической форме отражает важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, и связи, присущие составляющим его частям»[1].

Стремительно ускоряющаяся в последнее время математизация различных областей человеческой деятельности приводит к неизбежному сближению «абстрактной» и «прикладной» математики. Поэтому обучение математическому моделированию становится одним из центральных моментов всего школьного курса математики. Здесь нельзя не согласиться с А. Г. Мордковичем, который отводит понятиям «математическое моделирование», «математический язык» и «математическая модель» роль «идейного стержня», при наличии которого «математика предстает перед учащимися не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программа, а как цельная развивающая дисциплина общекультурного характера»[2].

Основным средством обучения стохастике являются сюжетно-практические задачи, через решение задач происходит накопление единичных фактов и примеров ситуаций вероятностного характера[3]. Д. В. Маневич отмечал, что «поиск решения задач по теории вероятностей вызывает у учащихся большие затруднения. Учащиеся теряются в выборе подходов к решению задач, так как известные им методы решения математических задач, как правило, мало пригодны для решения теоретико-вероятностных задач»[4].

В качестве основного метода решения задач по теории вероятностей В. В. Фирсов. А. Плоцки, С. В. Щербатых и другие предлагают использовать метод математического моделирования. Этим методом решаются прикладные задачи в 10–11 классах, а основы метода математического моделирования закладываются в 7–9 классах при решении простейших сюжетно-практические задач.

А. Плоцки писал: «Формулировка, подход к решению и решение задач по теории вероятностей – математическое творчество»[5], «каждая задача по теории

---

[1] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001, С. 7–8.

[2] Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы II Международной научной конференции (Москва, 2 – 4 октября 2014 г.). Москва: МПГУ, 2014. С. 123–128.

[3] Болотюк В. А. Формирование вероятностно-статистических представлений у учащихся в курсе алгебры основной школы: автореф. дис. … канд. пед. наук. Омск, 2002. 25 с.

[4] Маневич Д. В. Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики: автореф. дис. … канд. пед. наук. Ташкент, 1990. 36 с.

[5] Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников: книга для учащихся. Москва: Просвещение, 1996. С. 176.

вероятностей решается в определенной вероятностной модели», но «мир случайностей – это не только мир испытаний, все результаты которых одинаково вероятны»[1] и поэтому «не всегда эта модель классическая»[2].

Основная часть

На первых этапах изучения теории вероятностей учащиеся решают задачи, в которых требуется ответить на вопрос: «Какова вероятность того, что…», т. е. найти и обосновать способ вычисления вероятности некоторого случайного события и затем вычислить эту вероятность в соответствии с данным способом.

Основная трудность при решении вероятностных задач заключается в том, что не существует единого способа вычисления вероятности, который мог бы быть применен к любой задаче. Это связано со многими обстоятельствами и, в частности, с теми условиями, в которых рассматриваемые события наступают, а также с трактовкой описанных в задаче случайных событий, т. е.:

1) одно и то же событие в разных условиях может протекать по-разному;

2) одно и то же событие в одних и тех же условиях может быть интерпретировано разными способами.

Поэтому задача формирования умений школьников осуществлять перевод ситуации, описанной в задаче, на язык теории вероятностей и находить способ вычисления вероятности искомого события (*строить вероятностную модель*) играет важную роль в обучении теории вероятностей.

Анализ учебников показывает, что в школе рассматривается три основных способа нахождения вероятности случайного события:

1) на основании понятия равновозможности элементарных исходов;

2) на основании известных вероятностей других событий, связанных определенным образом с описанным в задаче случайным событием;

3) на основании конкретных опытных данных.

В соответствии с этими способами можно выделить следующие *вероятностные математические модели.*

1. Классическое определение вероятности случайного события (8 класс).

2. Геометрическое определение вероятности случайного события (9 класс).

3. Статистическое определение вероятности случайного события (7 класс).

4. Основные теоремы о вероятностях случайных событий.

4.1. Вероятность события, противоположного данному (8 класс).

4.2. Условная вероятность (8 класс).

4.3. Вероятность суммы событий: 1) для совместных событий; 2) для несовместных событий (8 класс).

---

[1] Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников: книга для учащихся. Москва: Просвещение, 1996. С. 177.

[2] Там же. С. 180.

ISSN 3034-1760

4.4. Вероятность произведения события: 1) для зависимых событий; 2) для независимых событий (8 класс).

5. Следствия из основных теорем.

5.1 Формула полной вероятности. Формула Байеса (10 класс).

5.2 Схема Бернулли (9 класс).

Эти вероятностные модели являются *основными*, так как к ним сводятся практически школьные задачи по теории вероятностей. Каждая из выделенных моделей отражает некоторые особенности описанного в задаче стохастического эксперимента, которые рассматриваются как признаки модели. В качестве примера рассмотрим задачу.

Задача 1. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что 5 очков выпадет хотя бы на одной из них?

Главной особенностью этого эксперимента является наличие в нем *конечного числа равновозможных элементарных исходов* (пары чисел: (1;1), (1;2), …, (6;6)), что является признаком модели при классическом определении вероятности. Поэтому любое случайное событие может быть представлено совокупностью благоприятствующих ему элементарных исходов. Более детальный анализ этой ситуации приводит к тому, что и искомое случайное событие: «выпадение 5-ти очков хотя бы на одной кости»,– может быть интерпретировано по-разному. Это приводит по крайней мере к трем различным вероятностным моделям (рис. 1.)

В каждом случае были учтены и отражены в соответствующих моделях важнейшие особенности стохастического эксперимента: наличие конечного числа равновозможных элементарных исходов (1-й, 2-й, 3-й способы); возможность совместного наступления двух событий (2-й способ); наступление двух взаимно противоположных событий (3-й способ). Поэтому каждая из этих моделей служит *адекватным описанием* соответствующей задачной ситуации.

Требование *адекватности* исходной ситуации является ключевым для любой математической модели. Отличительной особенностью вероятностных моделей является тот факт, что одна и та же ситуация может приводить не только к разным моделям, но и к разным численным результатам, причем каждая из рассматриваемых моделей будет соответствовать данной ситуации. Эту особенность следует учитывать и демонстрировать учащимся на конкретных примерах.

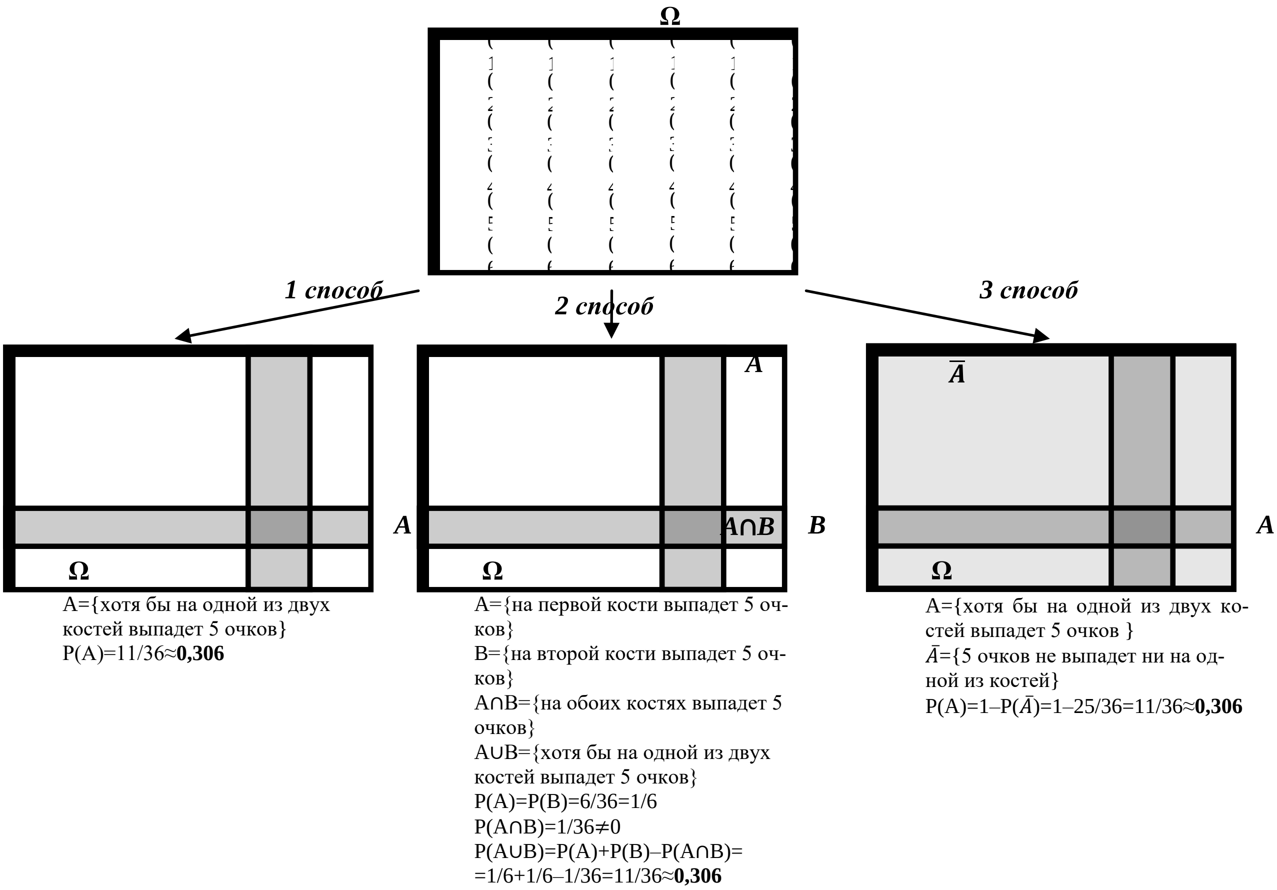


Рис. 1. Вариативность выбора вероятностной модели

Пример 1. (парадокс Бертрана) Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Какова вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность?[1]

Парадокс в том, эта задача приводит как минимум к трем различным вероятностным моделям, каждая из которых адекватно отражает стохастический эксперимент, но полученные ответы отличаются: 1) ≈ 0,333; 2) 0,5; 3) 0,25.

Сам Ж. Бертран отмечал, что ни одно из трех решений не является неверным, также, как ни одно из них не может быть единственно верным[2].

Подобный пример, но уже с 8-ю различными моделями и 6-ю различными ответами, был рассмотрен в докладе П. В. Семенова[3].

---

[1] Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Москва: Мир, 1990. С. 50.

[2] Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris, 1889. С. 4.

[3] Семенов П. В. Вероятность остроугольности треугольника как задача открытого типа // Математика и проблемы образования: материалы 41–го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Киров, 22–24 сентября 2022 г.). Киров, 2022. С. 30–31.

ISSN 3034-1760

Пример 2. Какова вероятность того, что случайно выбранный (нарисованный) треугольник окажется остроугольным? (1) 0,25; 2) ≈ 0,429; 3) ≈ 0,2956; 4) 0; 5) ≈ 0,3178; 6) ≈ 0,3726)

Можно предложить учащимся более простой пример, который не только иллюстрирует вышеуказанную особенность вероятностных задач, но и связывает разные подходы к определению вероятности случайного события.

Задача 2. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что а) выпадет 5 очков; б) выпадет четное число очков?

Обычно такие задачи решаются по классическому определению вероятности:

Ω={1; 2; 3; 4; 5; 6}; а) A={выпадет 5 очков}={5}; P(A)=1/6≈1,667;

б) A={выпадет четное число очков}={2; 4; 6}; P(A)=3/6=0,5.

В качестве упражнения можно предложить следующий эксперимент. С помощью компьютерной программы (например, табличного процессора EXEL) сгенерировать достаточно большое число подбрасываний кубика и найти относительные частоты выпадения чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 2).

A2 =ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(7-1)+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Результаты 100 подбрасываний кубика									
2	4	5	4	1	4	1	5	5	5	3
3	6	1	4	1	1	2	6	1	6	4
4	6	3	6	6	2	4	5	1	3	1
5	3	3	6	1	4	3	2	3	1	2
6	1	1	3	5	4	1	1	2	3	2
7	5	1	4	3	1	4	1	1	1	2
8	6	3	1	1	2	3	6	1	5	5
9	6	1	6	6	1	4	4	6	3	4
10	3	3	3	3	2	6	4	1	3	5
11	2	5	4	4	3	6	5	1	6	3

Рис. 2. Результаты 100 подбрасываний игральной кости

Тогда относительные частоты будут следующими (см. таблицу).

Таблица

Относительные частоты выпадения очков при подбрасывании кости

Число выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Частота	26	10	20	16	12	16
Относительная частота	**0,26**	**0,1**	**0,2**	**0,16**	**0,12**	**0,16**

Из таблицы видно, что частота выпадения 5 очков (событие А в пункте а)) в данном конкретном случае отличается от соответствующей вероятности, полученной в предположении, что все элементарные исходы равновозможны. Так как относительные частоты обладают теми же свойствами, что и вероятности, то можно найти относительную частоту выпадения четного числа очков (событие А в пункте б)): $\frac{10+16+16}{100} = \frac{42}{100} = 0{,}42$, которая также несколько отличается от соответствующей вероятности.

Подобные примеры показывают, что даже привычные задачные ситуации можно «обыграть» по-разному и формируют у учащихся целостное представление о вероятности.

Вновь обращаясь к задаче 1, отметим еще одну важную особенность. Возможность различных интерпретаций искомого события явилось основанием для построения различных математических описаний, т. е. дало возможность *выбора вероятностной модели* (рис. 1).

В первом случае искомое событие было интерпретировано как случайное событие A на множестве, состоящем из конечного числа равновозможных исходов, поэтому для вычисления вероятности его наступления $P(A)$ потребовалось применить только классическую вероятностную схему и формулу $P(A) = m/n$.

Во втором случае это же событие было интерпретировано как объединение двух событий $A \cup B$, поэтому для вычисления вероятности $P(A \cup B)$ его наступления потребовалось: 1) применить классическую вероятностную схему для вычисления вероятности каждого из составляющих его событий A и B; 2) установить совместность данных событий; 3) установить независимость этих событий; 4) вычислить вероятность $P(A \cap B)$; 4) применить формулу для вычисления вероятности объединения двух совместных событий $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

В третьем случае искомое событие A было выражено через противоположное ему событие $\bar{A}$, поэтому для вычисления вероятности $P(A)$ его наступления потребовалось: 1) применить классическую вероятностную схему для вычисле-

ISSN 3034-1760

ния вероятности события $\bar{A}$; 2) применить формулу для вычисления вероятности события, противоположного данному $P(A)=1–P(\bar{A})$.

Возможность выбора вероятностной модели приводит еще к одному требованию, предъявляемому к математическим (а значит, и вероятностным) моделям – требованию *достаточной простоты*. Это требование коротко можно описать так: если есть возможность построения разных вероятностных моделей (адекватно описывающих задачную ситуацию), то целесообразно выбирать ту из них, которая будет наиболее простой, удобной и понятной.

Заключение

Таким образом, можно выделить некоторые особенности применения метода математического моделирования в стохастике и, в частности, в теории вероятностей.

1. Спектр изучаемых в школе вероятностных моделей ограничен классическим, статистическим и геометрическим определениями вероятности, а также основными теоремами и следствиями из них. Сюда же можно отнести аксиоматическое определение вероятности, которое является обобщающим.

2. Каждая из выделенных моделей отражает разные особенности описанного в задаче стохастического эксперимента (*признаки модели*):

– *классическое определение вероятности:* равновозможность, конечность (свойства пространства элементарных исходов);

– *геометрическое определение вероятности:* равновозможность, непрерывность (элементарное событие описывается точкой на числовой прямой или отрезке);

– *статистическое определение вероятности;*

– *вероятность события, противоположного данному:* наличие двух взаимно противоположных событий;

– *условная вероятность*: наличие события-условия, предшествующего данному событию и меняющему его вероятность;

– *вероятность объединения событий*: совместность / несовместность;

– *вероятность пересечения события*: зависимость / независимость;

– *формула полной вероятности*: поэтапность эксперимента, наличие полной группы событий-гипотез;

– *схема Бернулли:* последовательность из n независимых испытаний с двумя исходами.

3. Основными требованиями, предъявляемыми к вероятностной модели, являются требование *адекватности* и *достаточной простоты*. Адекватность модели проявляется в том, что в ней должны быть отражены *все* особенности эксперимента, которые являются *признаками* данной модели. (например, фор-

мула $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ может быть вероятностной моделью некоторой ситуации, если речь идет об объединении двух *несовместных* событий, и, наоборот, не может быть использована в качестве вероятностной модели, если события *A* и *B совместны*). Требование достаточной простоты учитывается, когда имеется возможность выбора вероятностной модели (например, во многих задачах, где требуется вычислить вероятность наступления хотя бы одного из данных событий, легче перейти к противоположному событию: «хотя бы один» – «ни одного»).

Список литературы / References

Болотюк В. А. *Формирование вероятностно-статистических представлений у учащихся в курсе алгебры основной школы*: автореф. дис. … канд. пед. наук. Омск, 2002. 25 с. (In Russian)

Bolotyuk V. A. *Formation of probabilistic and statistical representations among students in the course of algebra of primary school*. PhD thesis. Omsk State Pedagogical University, 2002. (In Russian)

Высоцкий И. Р., Ященко И. В. *Вероятность и статистика: учебник для 7–9 классов. Ч. 1*. Москва: Просвещение, 2023. 177 с. (In Russian)

Vysotsky I. R., Yashchenko I. V. *Probability and statistics: textbook for grades 7–9. Part 1*. Moscow: Prosveshchenie, 2023. (In Russian)

Высоцкий И. Р., Ященко И. В. *Вероятность и статистика: учебник для 7–9 классов. Ч. 2*. Москва: Просвещение, 2023. 111 с. (In Russian)

Vysotsky I. R., Yashchenko I. V. *Probability and statistics: textbook for grades 7–9. Part 2*. Moscow: Prosveshchenie, 2023. (In Russian)

Маневич Д. В. *Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики*: автореф. дис. … канд. пед. наук. Ташкент, 1990. 36 с. (In Russian)

Manevich D. V. *Improving the content of general secondary education based on probability theory and statistics*. PhD thesis. Tashkent, 1990. (In Russian)

Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // *Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы II Международной научной конференции (Москва, 2 – 4 октября 2014 г.)*. Москва: МПГУ, 2014. С. 123–128. (In Russian)

Mordkovich A. G. On some problems of school mathematical education. *Actual problems of teaching mathematics and computer science at school and university: proceedings of the II International Scientific Conference (Moscow, October 2-4, 2014),* pp. 123–128. Moscow: MPSU, 2014. (In Russian)

Плоцки А. *Вероятность в задачах для школьников*. Москва: Просвещение, 1996. 192 с. (In Russian)

Plocki A. *Probability in problems for schoolchildren*. Moscow: Prosveshchenie, 1996. (In Russian)

Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. Москва: Физматлит, 2001. 320 с. (In Russian)

Samarsky A. A., Mikhailov A. P. *Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples*. Moscow: Fizmatlit, 2001. (In Russian)

Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. Москва: Мир, 1990. 240 с. (In Russian)

Sekei G. *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Moscow: Mir, 1990. (In Russian)

Семенов П. В. Вероятность остроугольности треугольника как задача открытого типа. *Математика и проблемы образования: материалы 41–го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Киров, 22–24 сентября 2022 г.*). Киров, 2022. С. 30–31. (In Russian)

Semenov P. V. The probability of the sharpness of a triangle as an open–type problem. In *Mathematics and Problems of Education: proceedings of the 41st International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer Science at universities and pedagogical universities (Kirov, September 22-24, 2022)*, pp. 30–31. Kirov, 2022. (In Russian)

Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень): для 5–9 классов образовательных организаций. Москва: Институт стратегии развития образования, 2023. 106 с. (In Russian)

The Federal work program of basic general education. Mathematics (basic level): for grades 5-9 of educational organizations. Moscow: Institute of Educational Development Strategy, 2023. (In Russian)

Bertrand J. *Calcul des probabilités*. Paris, 1889. https://archive.org/details/calculdesprobabi028601mbp/page/n69/mode/2up

Информация об авторах

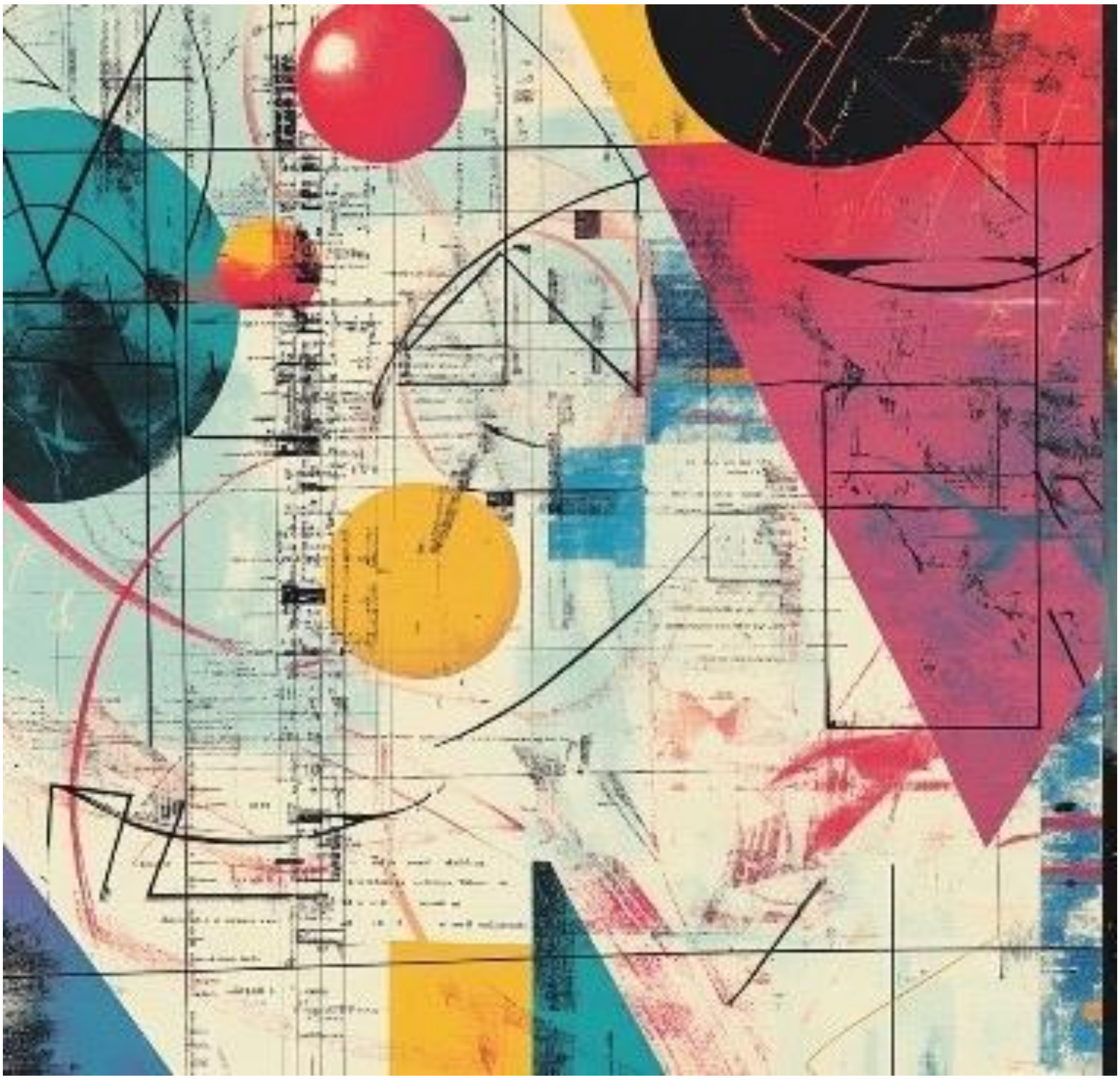
Наталия Николаевна Яремко – доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры теории и методики обучения математике и информатике, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X, yaremki@yandex.ru, Московский педагогический государственный университет (стр. 1, д. 14, ул. Краснопрудная, 107140 Москва, Россия); **Natalia N. Yaremko** – Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor of Department of Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X, yaremki@yandex.ru, Moscow Pedagogical State University (building 1, 14, Krasnoprudnaya str., 107140 Moscow, Russia).

Юлия Андреевна Яковлева – аспирант кафедры теории и методики обучения математике и информатике, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449, mayflower2299@gmail.com, Московский педагогический государственный университет (стр. 1, д. 14, ул. Краснопрудная, 107140 Москва, Россия); **Julia A. Yakovleva** – postgraduate student of the department of Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449, mayflower2299@gmail.com, Moscow Pedagogical State University (building 1, 14, Krasnoprudnaya str., 107140 Moscow, Russia).

Заявленный вклад авторов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. **Contribution of the authors:** The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию – 10.10.2024; одобрена после рецензирования – 31.10.2024; принята к публикации – 01.11.2024.

The article was submitted – 10.10.2024; approved after reviewing – 31.10.2024; accepted for publication – 01.11.2024.



Рецензии

Reviews

2024 · Том 1 · № 4

Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 66–70.
Education Research Environment, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 66–70.

Рецензия
УДК 37

Какая математика нужна в массовом вузовском математическом образовании?: *рецензия на статью* Попкова Р. А., Москаленко М. А., Табиевой А. В., Матвеевой М. В. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования // Современное профессиональное образование. 2024. № 3. С. 50–53.

Владимир Афанасьевич Тестов
Вологодский государственный университет,
Вологда, Россия,
vladafan@inbox.ru, https://orcid.org/0000–0002–3573–574X,
ResearcherID: A-5900–2016, Scopus Author ID 57203921177

Vladimir A. Testov
Vologda State university,
Vologda, Russia,
vladafan@inbox.ru, https://orcid.org/0000–0002–3573–574X,
ResearcherID: A-5900–2016, Scopus Author ID 57203921177

Для цитирования: *Тестов В. А.* Какая математика нужна в массовом вузовском математическом образовании?: *рецензия на статью* Попкова Р. А., Москаленко М. А., Табиевой А. В., Матвеевой М. В. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования // Современное профессиональное образование. 2024. № 3. С. 50–53 // Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 66–70.

What kind of mathematics is required in mass university mathematical education?: *Review of the article* by Popkov R. A., Moskalenko M. A., Tabieva A. V., Matveeva M. V. Algebra vs. computer algebra in the context of mass mathematical education // Modern Professional Education. 2024. No. 3. P. 50–53.

For citation: *Testov V. A.* What kind of mathematics is required in mass university mathematical education?: *Review of the article* by Popkov R. A., Moskalenko M. A., Tabieva A. V., Matveeva M. V. Algebra vs. computer algebra in the context of mass mathematical education // Modern Professional Education. 2024. No. 3. P. 50–53. *Education Research Environment*, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 66–70. (In Russian). https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

В рецензируемой статье[1] авторы пытаются обсудить вопрос о том, как надо преподавать математику в современных условиях и какую математику надо преподавать. При этом сразу отсекается из рассмотрения вопрос о преподавании математики будущим математикам, предполагая, что в настоящее время в этой части математического образования (математические школы и классы, математические олимпиады, математические факультеты университетов) все обстоит благополучно. Не затрагивается и проблема преподавания математики тем, кому математика нужна только для общего развития и кто вряд ли будет в будущем ее применять в своей профессиональной деятельности.

Остается достаточно большой пласт молодых людей, которые не стремятся стать математиками, но которым в будущей профессиональной деятельности в той или иной степени потребуется применять математику (инженеры, экономисты, специалисты естественнонаучного профиля и т. д.). В статье все они называются «нематематиками», и речь идет о преподавании математики именно таким людям.

Авторы совершенно верно отмечают, что мысли о том, что математику нематематикам нужно преподавать как-то иначе, приходят все чаще, притом самым разным ученым и преподавателям. Одним из таких ученых-математиков был видный петербургский алгебраист Н. А. Вавилов. Его мысли, высказанные в ряде статей и книг[2], написанных вместе с соавторами, вызвали большой резонанс в математическом сообществе, но каких-то заметных сдвигов в решении данной проблемы не произошло.

В рецензируемой статье осуществляется попытка вновь обратить внимание на актуальность этой проблемы и представлено описание авторского видения путей решения. Прежде всего, констатируется архаичность содержания основных вузовских математических курсов. В них доминирует курс математического анализа, основное содержание которого разработано еще в XIX веке. Его дополняет линейная алгебра с традиционным содержанием, идущим от Крамера (тоже XIX век) и небольшие куски дискретной математики. Сохраняется пере-

[1] Попков Р. А., Москаленко М. А., Табиева А. В., Матвеева М. В. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования // Современное профессиональное образование. 2024. № 3. С. 50–53.

[2] Подробнее см.: Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. Небеса падают: Математика для нематематиков // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 511. № 1. С. 144–160; Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. Mathematica для нематематика: учебное пособие для вузов. Москва: МЦНМО, 2021. 483 с. URL: https://www.mccme.ru/free-books/mathematica.pdf

кос в соотношении между непрерывной и дискретной математикой в пользу непрерывной, сложившийся более 100 лет назад. Кроме того, предлагается масса бездумных вычислительно-синтаксических задач, не демонстрирующих никаких содержательных идей. Наблюдается консерватизм не только в отборе материала, но и в способе его подачи, почти отсутствуют задачи исследовательского характера. Полностью игнорируется «компьютерная» реальность, в которой мы все давно живем, и которая только будет расширяться.

Какой же выход их этого положения предлагают авторы статьи? По их мнению, полному обновлению содержания математических курсов препятствует сила традиции. Более перспективным им представляется умеренный вариант, когда изменения содержания происходят из естественных потребностей, а системы компьютерной алгебры используются для вычислений и экспериментов. Применение компьютерных технологий в математике должно, прежде всего, подчеркивать их значимость для выполнения стандартных вычислений, которые вручную занимают непомерно много времени. Кроме того, оно должно способствовать глубокому осмыслению математической сути изучаемой дисциплины и иллюстрировать в математике экспериментальную составляющую.

Авторы делятся своим опытом применения в преподавании систем компьютерной алгебры (СКА). В настоящее время больше применяются системы *Maple* и *Mathematica*. Однако это лицензионные продукты, и их цена может стать препятствием легального использования в образовательных целях. По мнению авторов, для этих целей лучше подходит СКА *SageMath*, известная также как *Sage*. Ее ключевые преимущества: *Sage* доступна для бесплатного использования; основана на языке *Python*, что делает ее особенно удобной для тех, кто уже знаком с *Python* или планирует с ним познакомиться; *Sage* можно использовать без установки на компьютер.

В работе приведены конкретные примеры решения задач из алгебры матриц и алгебры многочленов, позволяющие убедиться в удобствах применения этой системы. Связь между алгеброй и геометрией, обычно показываемая в «аналитической геометрии», для тех, кто вооружен какой-либо системой компьютерной математики, может быть продемонстрирована при решении систем полиномиальных уравнений. Здесь естественным образом возникает понятия базиса Гребнера, классическим методом нахождения которого является алгоритм Бухбергера и некоторые его модификации.

По мнению авторов, достоинством СКА *Sage* является возможность применения изначального неоптимизированного алгоритма, что важно с учебной точки зрения. Рассмотрение данного вопроса позволяет увидеть мощь современной, но при этом идейно понятной математики, и значимость компьютерной алгебры.

Следует заметить, что застарелость содержания математических курсов в значительной степени объясняется тем, что вузовскими стандартами отбор содержания математических курсов определяется самими вузами, т. е. прежде всего преподавателями тех кафедр, которые ведут эти курсы. К сожалению, очень небольшое число преподавателей в вузах проявляют стремление привести содержание курсов в соответствие с современными требованиями.

Думается, что данная статья является весьма актуальной и полезной. Можно надеяться, что высказанная позиция, наряду со статьями и книгой Н. А. Вавилова, станет основой дискуссии по вопросу обновления содержания современных математических курсов в вузах.

Список литературы / References

Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. Небеса падают: Математика для нематематиков. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 2023, т. 511, № 1, с. 144–160.

Vavilov N. A., Khalin V. G., Yurkov A. V. The sky is falling: mathematics for non-Mathematicians. *Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, Computer Science, Control Processes*, 2023, v. 511, no. 1, pp. 144–160. (In Russian)

Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В. *Mathematica для нематематика: учебное пособие для вузов*. Москва: МЦНМО, 2021. 483 с. URL: https://www.mccme.ru/free-books/mathematica.pdf

Vavilov N. A., Khalin V. G., Yurkov A. V. *Mathematics for non-mathematicians: a tutorial for universities.* Moscow: MCNO, 2021. 483 p. (In Russian). URL: https://www.mccme.ru/free-books/mathematica.pdf

Попков Р. А., Москаленко М. А., Табиева А. В., Матвеева М. В. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования. *Современное профессиональное образование*, 2024, № 3, с. 50–53.

Popkov R. A., Moskalenko M. A., Tabieva A. V., Matveeva M. V. Algebra vs. computer algebra in the context of mass mathematical education. *Modern Professional Education*, 2024, no. 3, pp. 50–53. (In Russian)

Информация об авторе

Владимир Афанасьевич Тестов – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, vladafan@inbox.ru, https://orcid.org/0000–0002–3573–574X, Researcher ID: A-5900–2016, Scopus Author ID 57203921177, Вологодский государственный университет (15, ул. Ленина, 160000 Вологда, Россия); **Vladimir A. Testov** – Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, vladafan@inbox.ru, https://orcid.org/0000–0002–3573–574X, Researcher ID: A-5900–2016, Scopus Author ID 57203921177, Vologda State University (15, Lenin St., 160000 Vologda, Russia)

Статья поступила в редакцию – 14.10.2024; принята к публикации – 05.11.2024.
The article was submitted – 14.10.2024; accepted for publication – 05.11.2024.